

The background is a light blue notebook page with various mathematical symbols and school supplies scattered across it. Symbols include $+$, $-$, \times , \div , $\%$, $>$, $<$, $=$, ∞ , and $\frac{1}{2}$. School supplies include a red and yellow compass, a white calculator, a red triangular ruler, a yellow protractor, a red pen, a black pen, a pink paperclip, a green ruler, a yellow alarm clock, a pink notepad, and a white paperclip. There are also faint sketches of a sine wave, a right-angled triangle, and a circle.

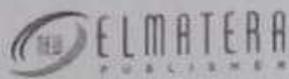
MATEMATIKA SEKOLAH

Barep Yohanes

MATEMATIKA SEKOLAH

Pengarang : Barep Yohanes
Desainer Cover : Candra Coret
Layouter : Atik Sustiwi

Diterbitkan oleh:



Penerbit Elmatera (Anggota IKAPI)

Jl. Waru 78 Kav 3 Sambilegi Baru Maguwoharjo Yogyakarta

Telp. 0274-4332287

Email: penerbitelmatera@yahoo.co.id

Cetakan Pertama, November 2020

Ukuran buku : 14,5 x 21 cm, vi + 72 hlm

ISBN : 978-623-223-139-9

Hak Cipta pada Penulis, dilindungi Undang-Undang.

KATA PENGANTAR

Salam Damai Sejahtera

Puji syukur ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa, karena atas kasih dan anugerahnya-Nya penulisan buku yang berjudul “Matematika Sekolah” dapat terselesaikan. Penulis merasa bahwa banyak pihak yang telah memberikan bantuan dan dukungan untuk terselesaikannya penyusunan buku ini. Penulis mengucapkan ucapan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada:

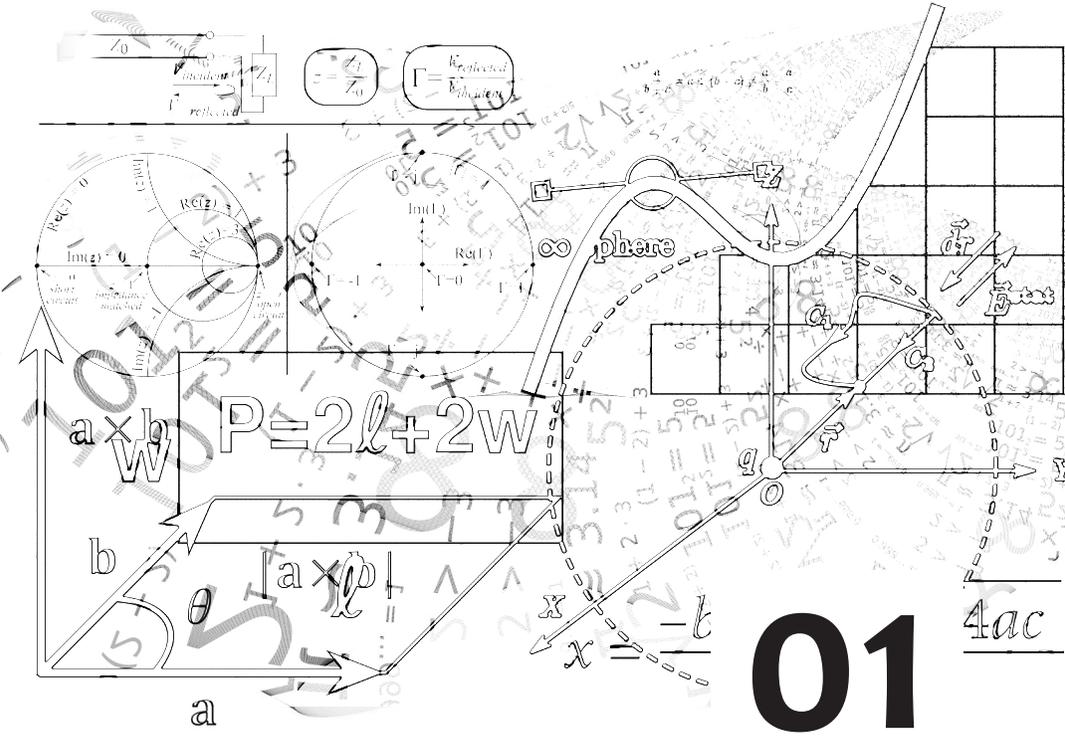
1. KEMENRISTEK/BRIN LLDIKTI Wilayah VII yang telah membiayai penelitian dan penerbitan buku ini.
2. Dr. Sadi, M.M., selaku Rektor Universitas PGRI Banyuwangi
3. Segenap jajaran LPPM Universitas PGRI Banyuwangi
4. Segenap jajaran Fakultas Matematika dan IPA, Universitas PGRI Banyuwangi
5. Isti Dwi Setyowati (Istri) dan Aksioma Yois (Putri)
6. Keempat Orang Tua, Kakak, Adik, dan keponakan
7. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu dan yang telah banyak membantu penyelesaian buku ini.

Biarlah Tuhan senantiasa memberkati dan mencurahkan kasih-Nya kepada semua pihak yang telah turut membantu. Penulis menyadari bahwa buku ini masih banyak terdapat kekurangan. Oleh karena itu, saran perbaikan dan kritik yang bersifat membangun sangat diharapkan, dan semoga tulisan ini bermanfaat khususnya dalam bidang Pendidikan matematika sekolah, Aaamiin.

Banyuwangi
Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	III
DAFTAR ISI	V
01 MATEMATIKA SEKOLAH DAN MATERINYA	1
02 STANDAR ISI MATEMATIKA SEKOLAH	7
Bilangan dan Operasinya	8
Aljabar	16
Geometri	30
Pengukuran	38
Analisis Data dan Probabilitas	42
03 STANDAR PROSES MATEMATIKA SEKOLAH	55
Pemecahan Masalah (Problem Solving)	56
Penalaran dan Pembuktian (Reasoning and Proof)	58
Komunikasi (Communication)	59
Koneksi (Connection)	60
Representasi (Representation)	65
DAFTAR PUSTAKA	69
TENTANG PENULIS	71



Matematika Sekolah dan Materinya

Matematika merupakan cabang ilmu yang berhubungan dengan sistem Aksiomatik yang bersifat logis dan analitis (Penalaran). Matematika berjalan berdasarkan suatu aksioma-aksioma yang telah disepakati dalam matematika. Aksioma adalah pernyataan yang memuat istilah dasar dan istilah terdefinisi dan tidak berdiri sendiri dan tidak diuji kebenarannya. Matematika secara aksiomatik terdiri dari aksioma-aksioma yang dapat menghasilkan suatu teorema-teorema. Matematika memiliki struktur yang dapat dibuktikan kebenarannya secara sistematis. Matematika memiliki pembuktian yang sangat mendalam sehingga menghasilkan suatu hubungan yang tak terpisahkan. Matematika memiliki pembahasan yang khusus dan mendasar sehingga memiliki tingkat kepercayaan yang sangat kuat berdasarkan alur pembuktiannya.

Matematika Sekolah merupakan suatu bagian dari Matematika yang memiliki ruang lingkup untuk pembelajaran di sekolah. Matematika Sekolah memiliki fungsi sebagai alat, pola pikir, dan ilmu pengetahuan. Matematika merupakan ilmu yang bersifat logis dapat dijadikan suatu alat untuk mengembangkan pola pikir peserta didik dalam membangun karakter pemikiran yang teratur. Matematika Sekolah yang diajarkan pada tingkat sekolah tersebut melatih peserta didik untuk berusaha berpikir logis dan juga analitis untuk menumbuhkan daya piker. Matematika Sekolah juga memberikan pemahaman kepada peserta didik fungsi dari Matematika untuk kehidupan sehari-hari. Konsep Matematika sekolah mengajarkan peserta didik tentang pengetahuan Matematika yang sangat bermanfaat baik dalam kehidupan sehari-hari ataupun dalam hubungannya dengan bidang ilmu lainnya.

Pengembangan Matematika pada dunia pendidikan Matematika Sekolah memiliki 2 tujuan , yaitu: (1) Mempersiapkan peserta didik dalam menghadapi perubahan global, dan (2) Mempersiapkan

peserta didik untuk dapat menggunakan dan memiliki pola pikir Matematika dalam kehidupan sehari-hari. Matematika mengajarkan peserta didik untuk dapat berpikir secara logis, rasional, kritis, cermat, jujur, efektif, dan efisien. Cara pikir tersebut akan melatih dan mempersiapkan peserta didik untuk dapat menghadapi perkembangan dunia yang sangat cepat. Matematika juga memiliki peranan yang sangat penting dalam kehidupan sehari-hari. Melalui pengetahuan tentang Matematika akan mengajarkan peserta didik untuk dapat mengaplikasikan konsep Matematika yang dipelajari dalam kehidupannya secara nyata.

Matematika Sekolah memiliki Prinsip dan Standar yang menjadi ciri khusus dari matematika untuk kemajuan dalam Pendidikan. Kemajuan Pendidikan dalam Matematika telah dikaji lebih dalam oleh para dewan guru Matematika yang disebut NCTM. *National Council Of Teacher Of Mathematics* (NCTM) merupakan organisasi terbesar didunia yang peduli terhadap pendidikan Matematika dengan anggota di Amerika Serikat, Kanada, dan Internasional. NCTM didirikan pada tahun 1920 yang merupakan Dewan Nasional Guru Matematika di Amerika Serikat dan Kanada. NCTM merupakan suara publik untuk guru Matematika sehingga memastikan bahwa Matematika diajarkan secara adil dengan kualitas yang lebih baik bagi peserta didik. NCTM memiliki kegiatan tahunan untuk guru Matematika berupa Konferensi Nasional, Regional, dan menerbitkan empat jurnal yang berpengaruh terhadap Pendidikan Matematika.

NCTM membahas 5 standar isi dan 5 Standar proses dalam Matematika Sekolah yang menggambarkan pengetahuan, pemahaman, dan keterampilan matematika yang harus diperoleh peserta didik dari tingkat dasar hingga tingkat Sekolah Menengah Atas. Lima Standar isi menjelaskan konten matematika yang harus dipelajari peserta didik agar berhasil. Lima standar proses

berikutnya menyoroti proses matematika yang peserta didik manfaatkan untuk memperoleh dan menggunakan pengetahuan konten mereka. Bersama-sama 10 Standar ini mendefinisikan matematika dasar bahwa semua peserta didik harus memiliki kesempatan untuk belajar matematika, terlepas dari keputusan mereka untuk melanjutkan ke pendidikan tinggi atau ke dunia kerja setelah sekolah menengah. Standar Isi adalah Bilangan dan Operasi, Aljabar, Geometri, Pengukuran, dan Analisis Data dan Probabilitas. Standar Proses adalah Pemecahan Masalah, Penalaran dan Pembuktian, Komunikasi, Koneksi, dan Representasi. Untuk setiap Standar Isi daftar ekspektasi kelompok kelas tertentu disediakan.

Matematika Sekolah berdasarkan NCTM (2000) memiliki 6 (enam) prinsip dasar untuk mewujudkan suatu Pendidikan Matematika yang berkualitas tinggi dan memberikan panduan untuk membuat keputusan pendidikan. Keenam prinsip tersebut adalah (1) Kesetaraan/Keadilan/Pemerataan; (2) Kurikulum; (3) Pengajaran/Pembelajaran; (4) Belajar; (5) Penilaian; dan (6) Teknologi (Subanji, 2011).

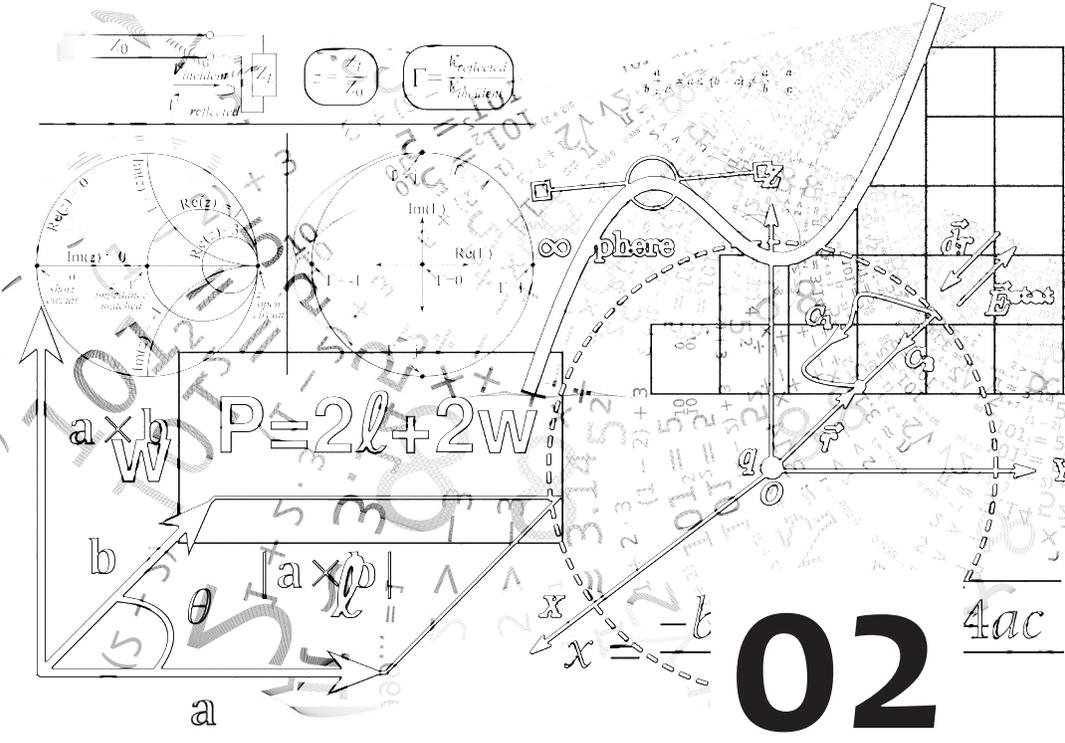
Kesetaraan/Keadilan/Pemerataan merupakan prinsip bahwa belajar Matematika harus dapat diperoleh semua peserta didik. Prestasi Matematika yang tinggi tidak hanya untuk peserta didik tertentu, tetapi berlaku untuk semua peserta didik. Keunggulan dalam pendidikan matematika membutuhkan kesetaraan dan harapan yang tinggi dan dukungan yang kuat untuk semua peserta didik. Kurikulum merupakan prinsip bahwa dalam Matematika Sekolah harus memiliki kurikulum yang koheren atau berhubungan dan bersangkutan paut. Kurikulum yang jelas harus dapat menggambarkan keterhubungan Matematika antar tingkatan sehingga peserta didik dapat belajar Matematika dengan teratur. Sebuah kurikulum lebih dari sekedar kumpulan kegiatan. Kurikulum

harus koheren, fokus pada matematika yang lebih penting terlebih dahulu dan diartikulasikan dengan baik di seluruh kelas.

Pengajaran/Pembelajaran merupakan interaksi antara Pendidik, Peserta Didik, dan Sumber belajar. Pembelajaran harus bisa memberikan ruang bagi peserta didik untuk mengembangkan dan mengeksklore kemampuan yang dimiliki. Pembelajaran diharapkan dapat mendorong peserta didik untuk berpikir, menyelesaikan masalah, mendiskusikan ide-ide, dan menggunakan strategi untuk penyelesaian masalah. Pengajaran matematika yang efektif membutuhkan pemahaman tentang yang peserta didik ketahui dan butuhkan untuk dipelajari dan kemudian menantang dan mendukung mereka untuk mempelajarinya dengan baik. Prinsip belajar matematika merupakan proses untuk memahami atau menalar, membangun atau mengkonstruksi secara aktif suatu pengetahuan baru dari pengalaman dan pengetahuan sebelumnya. Belajar matematika juga mendorong peserta didik untuk memiliki kecakapan berfikir dan bernalar matematis dalam menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan kehidupan sehari-hari. Peserta didik harus belajar matematika dengan pemahaman dan juga secara aktif membangun pengetahuan baru dari pengalaman dan pengetahuan sebelumnya.

Penilaian dalam Matematika Sekolah harus dilakukan secara berkelanjutan dan terus menerus untuk memperoleh informasi tentang kemajuan belajar, mendorong peserta didik lebih giat lagi belajar, dan memperbaiki pembelajaran. Penilaian menjadi pendukung penting dalam pembelajaran matematika dan memberikan informasi yang berguna bagi guru dan peserta didik. Teknologi sangat penting dalam pengajaran dan pembelajaran matematika. Teknologi mempengaruhi konsep matematika yang diajarkan dan meningkatkan pembelajaran peserta didik. Teknologi

sangat diperlukan dalam pembelajaran Matematika untuk mengeksplor lebih luas dan memperbaiki penyajian ide matematika.



Standar Isi pada Matematika Sekolah

Pendidikan Matematika merupakan bidang ilmu Pendidikan yang berfokus pada pembelajaran Matematika. Pendidikan matematika mewadahi matematika yang telah dipelajari pada jenjang sekolah. Pendidikan Matematika mengulas dan membahas perihal pembelajaran yang dilakukan untuk menyampaikan konsep matematika. Pendidikan Matematika menjelajahi fenomena-fenomena yang terjadi dalam pembelajaran matematika dan respon dari belajar matematika.

Perkumpulan dunia yang menaungi pembelajaran matematika sekolah dinamakan NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics*). NCTM merupakan dewan guru matematika yang berusaha menggali perihal gagasan dalam pembelajaran matematika. NCTM menjelaskan bahwa setiap orang perlu memahami matematika. Semua orang harus memiliki kesempatan dan dukungan yang diperlukan untuk mempelajari matematika yang signifikan dengan kedalaman dan pemahaman. Tidak ada konflik antara ekuitas dan keunggulan

NCTM (NCTM, 2000) menjelaskan bahwa dalam Matematika Sekolah terdapat Standar Isi. Standar Isi yang dimaksud berkaitan dengan materi matematika yang diperlukan dalam pembelajaran di sekolah. Materi yang dipelajari di sekolah terdiri dari Bilangan dan Operasinya, Aljabar, Geometri, Pengukuran, Analisis Data, dan Probabilitas. Materi tersebut akan dibahas secara terperinci dan dilengkapi dengan pembuktian-pembuktian sebagai pengetahuan pada konsep matematika sekolah.

BILANGAN DAN OPERASINYA

Bilangan merupakan dasar dari sebuah matematika yang menunjukkan representasi dari nilai. Bilangan memberikan nilai secara nyata pada konsep matematika untuk menunjukkan adanya suatu besaran. Bilangan-bilangan yang telah didefinisikan pada

suatu semesta tertentu akan membentuk suatu himpunan bilangan. Terdapat beberapa himpunan bilangan dalam suatu matematika yang telah didefinisikan. Pembahasan pada materi Bilangan dan Operasinya disadur dari buku “*Calculus, 9th Edition*” (Varberg, Purcell dan Rigdon, 2010) dan “*Introduction To Real Analysis Fourth Edition* (Bartle dan Sherbert, 2011).

Himpunan bilangan asli (*Natural*) merupakan suatu himpunan yang diberi simbol N , diapit oleh kurung kurawal, diberi tanda koma diantara komponen-komponen bilangan, dan didefinisikan sebagai berikut:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$$

Awal mula himpunan bilangan asli digunakan untuk mencacah atau membilang. Bilangan Asli terbentuk sebagai dasar dari bilangan-bilangan pada matematika. Bilangan Asli memiliki jumlah yang tak terbatas dan memiliki nilai terkecil yaitu 1.

Bilangan Asli memiliki bagian yang disebut bilangan asli genap atau ganjil. Bilangan Asli dikatakan Genap jika memenuhi bentuk $2n$ untuk suatu n anggota Bilangan Asli. Bilangan Asli dikatakan Ganjil jika memenuhi bentuk $2n-1$ untuk suatu n anggota Bilangan Asli. Setiap Bilangan Asli pasti Genap atau Ganjil, tetapi tidak bisa memenuhi keduanya.

Himpunan Bilangan Asli yang diberikan bilangan 0 (nol) pada bilangan terkecil akan memiliki dampak pada himpunan bilangan. Himpunan Bilangan Asli yang diberikan bilangan 0 (nol) disebut Bilangan Cacah. Himpunan Bilangan Cacah didefinisikan sebagai berikut:

$$\text{Bilangan Cacah} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$$

Secara notasi himpunan bilangan cacah dapat dinyatakan dengan $\{0\} \cup \mathbf{N}$. Bilangan Cacah merupakan gabungan dari himpunan yang beranggotakan bilangan 0 (nol) dengan bilangan Asli.

Terdapat suatu elemen a yang merupakan anggota bilangan asli dan terdapat suatu bilangan $-a$ sehingga memenuhi $a + (-a) = 0$ dan $(-a) + a = 0$, maka $-a$ disebut elemen negatif dari a . Dengan kata lain bahwa Bilangan Negatif merupakan elemen Negatif dari suatu bilangan tertentu. Elemen Negatif dari Bilangan Asli dapat dinyatakan sebagai berikut:

Elemen Negatif Bilangan Asli = $\{\dots, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$

Himpunan Elemen Negatif dari Bilangan Asli berjumlah tak terhingga dengan bilangan terbesar adalah -1 .

Himpunan Bilangan Asli yang digabungkan dengan 0 (nol) dan elemen negatif dari Himpunan bilangan asli disebut Himpunan Bilangan Bulat. Himpunan Bilangan Bulat dinotasikan dengan \mathbf{Z} . Bilangan Bulat terdiri dari 3 (tiga) komponen yang disebut dengan Trikotomi yaitu, Bilangan Bulat Positif (\mathbf{Z}^+), Bilangan Bulat Negatif (\mathbf{Z}^-), dan Nol $\{0\}$. Nol bukan bilangan bulat positif ataupun bilangan bulat negatif, tetapi nol merupakan bilangan tersendiri dari suatu kesatuan pada himpunan bilangan bulat.

$$\mathbf{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Sifat Trikotomi dinyatakan sebagai berikut:

1. Himpunan Bilangan Bulat Positif:

$$\mathbf{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$$

2. Himpunan Bilangan Bulat Negatif:

$$\mathbf{Z}^- = \{\dots, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$$

3. Himpunan Bilangan Nol = $\{0\}$

Bilangan Bulat yang tersusun dalam suatu himpunan dengan memberikan istilah pembilang dan penyebut disebut Bilangan Rasional atau Bilangan Pecahan. Bilangan Rasional dinotasikan dengan simbol Q . Definisi Bilangan Rasional atau Bilangan Pecahan sebagai berikut:

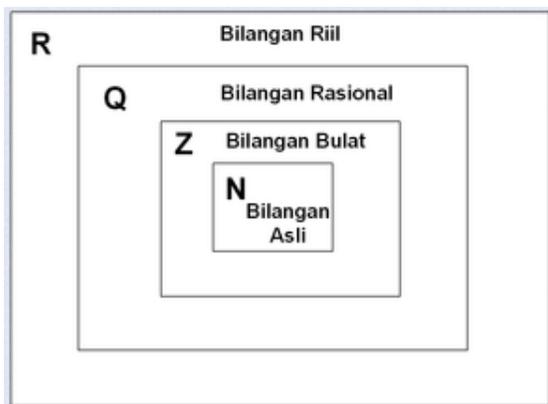
Jika p adalah elemen dari Q , maka:

$$p = \frac{a}{b}, \text{ dimana } a, b \in \mathbf{Z} \text{ dan } b \neq 0$$

Pada definisi di atas maka a disebut Pembilang dan b disebut Penyebut. Secara kalimat bahwa bilangan Rasional dapat didefinisikan suatu bilangan yang dapat dinyatakan dengan $\frac{a}{b}$ dimana a, b adalah elemen dari bilangan bulat dan b tidak boleh sama dengan 0. Saat b bernilai 0 maka bilangan tersebut tidak terdefinisi atau *Undefined*.

Suatu Bilangan r yang memenuhi $r^2 = 2$, maka r tersebut bukan bilangan Rasional. Dengan menggunakan pembuktian secara kontradiktif diperoleh bahwa tidak ada bilangan Rasional r yang memenuhi $r^2 = 2$. Bilangan r tersebut dinamakan bilangan Irrasional.

Bilangan Asli, Bilangan Bulat, Bilangan Rasional, dan Bilangan Irrasional tersebut merupakan himpunan bagian dari Bilangan Real. Himpunan Bilangan Asli merupakan himpunan bagian dari bilangan bulat, Himpunan bilangan bulat merupakan himpunan bagian dari bilangan Rasional, Himpunan bilangan rasional atau irrasional merupakan himpunan bagian dari bilangan Real. Himpunan bilangan Real disimbolkan dengan R . Adapun skema bilangan dapat disajikan dalam bentuk gambar sebagai berikut:



Gambar 1 Skema Bilangan

Secara singkat bahwa sistem struktur Aljabar dari Bilangan Real memiliki 2 (dua) sifat dasar operasi yaitu penjumlahan dan perkalian. Sistem Bilangan Real mengandung suatu Aksioma Lapangan (*Field Axiom*) dari operasi penjumlahan dan perkalian sebagai berikut:

1. Sifat Komutatif pada Penjumlahan **A1**
 $a + b = b + a$, untuk semua a dan b elemen dari R
2. Sifat Asosiatif pada Penjumlahan **A2**
 $(a + b) + c = a + (b + c)$, untuk semua a , b , dan c elemen dari R
3. Keberadaan elemen identitas (0) **A3**
 Terdapat 0 elemen dari R yang memenuhi $a + 0 = a$ dan $0 + a = a$, untuk semua a elemen dari R (*existence of a zero element*)
4. Keberadaan Invers pada masing-masing elemen **A4**
 Untuk masing-masing a elemen R maka ada yang memenuhi suatu $-a$ elemen R sedemikian hingga $a + (-a) = 0$ dan $(-a) + a = 0$ (*existence of negative elements*)

5. Sifat Komutatif pada Perkalian **A5**
 $a \cdot b = b \cdot a$, untuk semua a dan b elemen dari R
6. Sifat Asosiatif pada Perkalian **A6**
 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, untuk semua a, b , dan c elemen dari R
7. Keberadaan elemen identitas **A7**
 Terdapat suatu elemen 1 yang berbeda dengan 0 sedemikian sehingga $1 \cdot a = a$ dan $a \cdot 1 = a$, untuk semua a elemen R (*existence of a unit element*)
8. Keberadaan Invers pada masing-masing elemen **A8**
 Untuk masing-masing $a \neq 0$ elemen R sehingga ada yang memenuhi $\frac{1}{a}$ elemen R sedemikian hingga $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, dan $\frac{1}{a} \cdot a = 1$ (*existence of reciprocals*)
9. Sifat Distributif dari Perkalian dalam Penjumlahan **A9**
 $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ dan $(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$,
 untuk semua a, b , dan c elemen R

Sifat operasi tersebut sangatlah umum dan familiar dalam operasi pada bilangan bulat maupun bilangan real. Operasi penjumlahan dan perkalian tersebut selanjutnya terdapat definisi dari pengurangan dan pembagian. Adapun operasi pengurangan didefinisikan dengan,

$$a - b = a + (-b), \text{ untuk } a \text{ dan } b \text{ elemen } R$$

Untuk operasi pembagian didefinisikan dari a dan b elemen R ,

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$

Teorema

- Jika z dan a adalah elemen dari R dengan $z + a = a$, maka $z = 0$.
- Jika u dan $b \neq 0$ adalah elemen dari R dengan $u \cdot b = b$, maka $u = 1$.
- Jika a adalah elemen dari R , maka $a \cdot 0 = 0$.

Bukti

- Dengan hipotesis bahwa $z + a = a$, maka:

$$z = z + 0$$

A3

$$z + 0 = z + (a + (-a))$$

A4

$$z + (a + (-a)) = (z + a) + (-a)$$

A2

$$(z + a) + (-a) = a + (-a)$$

Hipotesis

$$a + (-a) = 0$$

A4

$$z = 0$$

- Dengan hipotesis bahwa $u \cdot b = b$, maka:

$$u = u \cdot 1$$

A7

$$u \cdot 1 = u \cdot (b \cdot \frac{1}{b})$$

A8

$$u \cdot (b \cdot \frac{1}{b}) = (u \cdot b) \cdot \frac{1}{b}$$

A6

$$(u \cdot b) \cdot \frac{1}{b} = b \cdot \frac{1}{b}$$

Hipotesis

$$b \cdot \frac{1}{b} = 1$$

A8

$$u = 1$$

- Dengan melihat teorema (a) dan terbukti bahwa jika

$$z + a = a + z = a, \text{ maka } z = 0$$

Kita akan buktikan bahwa $a \cdot 0 = 0$

$$a + a \cdot 0 = a \cdot 1 + a \cdot 0 = a(1 + 0) = a \cdot 1 = a$$

terbukti bahwa $a + a \cdot 0 = a$ sehingga $a \cdot 0 = 0$

Latihan

1. Jika $a, b \in R$, buktikan bahwa:
 - a) jika $a + b = 0$, maka $b = -a$
 - b) $-(-a) = a$
 - c) $(-1)a = -a$
 - d) $(-1)(-1) = 1$
 - e) $-(a + b) = (-a) + (-b)$
 - f) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$
 - g) $\frac{1}{(-a)} = -\left(\frac{1}{a}\right)$
 - h) $-\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{(-a)}{b}$, jika $b \neq 0$

(Bartle dan Sherbert, 2011:30)

2. Pada tes kemampuan matematika, skor total ditentukan dengan aturan, skor 4 untuk jawaban benar, skor -2 untuk jawaban salah, dan skor -1 untuk soal tidak dijawab. Dari 50 soal yang diberikan, Amir hanya menjawab 48 soal dan memperoleh skor 100. Banyak soal yang dijawab Amir dengan benar adalah ... (UN SMP 2019)
3. Dari ramalan cuaca kota-kota besar di dunia tercatat suhu tertinggi dan terendah adalah sebagai berikut. Moskow: terendah -5°C dan tertinggi 18°C ; Mexico: terendah 17°C dan tertinggi 34°C ; Paris: terendah -3°C dan tertinggi 17°C ; dan Tokyo: terendah -2°C dan tertinggi 25°C . Perubahan suhu terbesar terjadi di kota ... (UN SMP 2007)
4. Apabila Hari Pendidikan Nasional pada tanggal 2 Mei adalah hari Selasa, HUT Kemerdekaan RI tanggal 17 Agustus pada tahun yang sama adalah hari ... (UN SMP 2019)

ALJABAR

Aljabar merupakan bagian dari ilmu matematika yang berisi tentang teori bilangan, geometri, dan analisis penyelesaiannya. Aljabar dirumuskan oleh seorang matematikawan, astronomer, dan geograf dari Persia yang bernama Muhammad Bin Musa Al-Khwarizmi dalam bukunya yang berjudul “Ilm Al-jabr Wa’l-mukabala”. Aljabar dalam matematika sekolah berisi tentang Persamaan Linear dan pertidaksamaan linear beserta penyelesaiannya. Materi Aljabar dalam pembahasan berikut disadur dari buku *Elementary Linear Algebra Ninth Edition* (Anton dan Rorres, 2005).

Persamaan Linear

Suatu Garis Lurus dalam bidang xy dapat direpresentasikan secara aljabar dalam suatu persamaan bentuk,

$$a_1x + a_2y = b$$

dengan a_1 , a_2 , dan b adalah suatu konstanta real dan a_1 dan a_2 keduanya bukan 0 (nol). Bentuk Persamaan tersebut merupakan Persamaan Linear dalam variable x dan y . Secara umum bahwa Persamaan Linear dalam n variabel $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ didefinisikan dengan bentuk,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$$

dimana $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ dan b adalah konstanta real.

Persamaan di atas dapat dinyatakan bahwa

- a_1, a_2, a_3, a_n dinamakan Koefisien dari Variabel
- x_1, x_2, x_3, x_n dinamakan variabel
- b dinamakan bilangan konstan

Contoh Persamaan Linear:

1. $x + 2y = 8$ *persamaan linear 2 variabel*
2. $y = \frac{1}{2}x + 2z + 2$ *persamaan linear 3 variabel*
3. $3x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 = 12$ *persamaan linear 4 variabel*

Contoh Persamaan yang tidak Linear

1. $2x + 3\sqrt{y} = 10$
2. $4x + 2y - z + xy = 10$
3. $y = \cos x$

Solusi atau Penyelesaian dari suatu Persamaan Linear ($a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n = b$) adalah suatu barisan n bilangan $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ yang memenuhi ketika disubstitusikan kedalam $x_1 = s_1, x_2 = s_2, x_3 = s_3, \dots, x_n = s_n$. **Himpunan Solusi atau Penyelesaian Umum** adalah himpunan semua solusi atau penyelesaian dari suatu persamaan.

Sistem Persamaan Linear

Suatu himpunan terbatas dengan elemen lebih dari satu persamaan linear dalam variabel $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ disebut **Sistem Persamaan Linear** atau **Sistem Linear**. Suatu barisan dari bilangan $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ disebut Solusi dari sistem jika $x_1 = s_1, x_2 = s_2, x_3 = s_3, \dots, x_n = s_n$ adalah solusi untuk setiap persamaan dalam sistem.

Contoh Sistem Persamaan Linear

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 &= -4 \end{aligned}$$

Sistem Persamaan Linear di atas memiliki solusi $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1$, karena nilai tersebut memenuhi pada kedua persamaan linear.

Tidak semua Sistem Persamaan Linear mempunyai solusi, Perhatikan Sistem Persamaan Linear berikut:

$$\begin{aligned}x + y &= 4 \\2x + 2y &= 6\end{aligned}$$

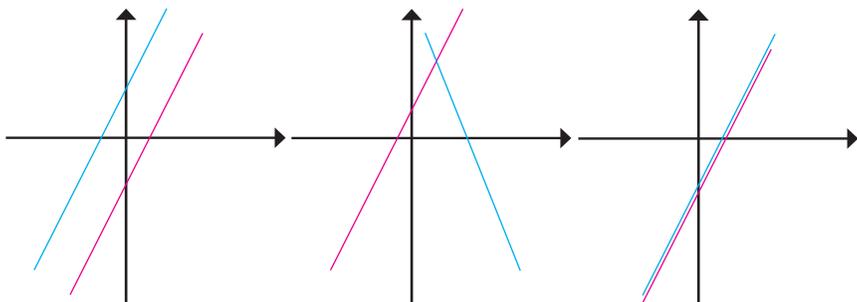
saat persamaan linear kedua dikalikan dengan $\frac{1}{2}$ maka didapat Sistem Persamaan Linear yang ekuivalen sebagai berikut,

$$\begin{aligned}x + y &= 4 \\x + y &= 3\end{aligned}$$

Sehingga didapat suatu Persamaan yang Kontradiktif (*Contradictory Equations*).

Sistem Persamaan Linear yang tidak memiliki solusi atau penyelesaian disebut *Inconsistent*, sedangkan Sistem Persamaan Linear yang memiliki minimal 1 solusi atau penyelesaian dalam sistem disebut *Consistent*.

Sistem Persamaan Linear memiliki 3 kemungkinan solusi yang dihasilkan. Solusi dari sistem persamaan linear merupakan titik potong antara garis-garis yang memenuhi persamaan linear pada sistem tersebut. Adapun kemungkinan 3 solusi sistem persamaan linear sebagai berikut,



Gambar 2.1 sistem persamaan linear Tidak Memiliki Solusi Jika
Gambar 2.2 Sistem Persamaan Linear Memiliki 1 Solusi pada Titik Potong
Gambar 2.3 Sistem Persamaan Linear Memiliki takhingga Solusi jika berhimpit

Solusi suatu Sistem Persamaan Linear dapat dicari dengan menggunakan beberapa metode yang simple sampai metode yang rumit. Cara simpel dapat dicari dengan menggunakan metode eliminasi variabel-variabel yang bersesuaian, sedangkan cara yang rumit dapat dilakukan dengan melakukan yang disebut *Augmented Matrix*.

Menentukan Solusi/Penyelesaian Sistem Persamaan Linear dengan Metode Eliminasi

Contoh:

Diberikan suatu Sistem Persamaan Linear:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$$

$$2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1$$

$$3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0$$

Solusi dari Sistem Persamaan di atas dapat dicari dengan menggunakan metode eliminasi dengan cara sebagai berikut:

- **Pertama eliminasi antara persamaan:**

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \quad (\text{Kalikan dengan } 2) \quad 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 18$$

$$2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1 \quad (\text{Kalikan dengan } 1) \quad 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1$$

Lalu kedua persamaan tersebut dikurangi dan mendapatkan persamaan:

$$-2x_2 + 7x_3 = 17 \quad \text{Persamaan (a)}$$

- **Kedua eliminasi antara persamaan:**

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \quad (\text{Kalikan dengan } 3) \quad 6x_1 + 12x_2 + 9x_3 = 3$$

$$3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0 \quad (\text{Kalikan dengan } 2) \quad 6x_1 + 12x_2 - 10x_3 = 0$$

Lalu kedua persamaan tersebut dikurangi dan mendapatkan persamaan:

$$x_3 = 3 \qquad \text{Persamaan (b)}$$

- **Substitusi Persamaan (b) pada Persamaan (a)**

$$-2x_2 + 7 \cdot 3 = 17$$

Didapat bahwa nilai $x_2 = 2$

- **Kemudian substitusi hasil dari $x_3 = 3$ dan $x_2 = 2$ pada salah satu persamaan pada Sistem Persamaan di atas. (kita pilih persamaan $x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$)**

$$x_1 + 2 + 2 \cdot 3 = 9$$

Didapat nilai $x_1 = 1$

- **Dari langkah di atas dapat disimpulkan bahwa solusi dari Sistem Persamaan Linear**

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$$

$$2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1$$

$$3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0$$

Adalah $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, dan $x_3 = 3$

Menentukan Solusi/Penyelesaian Sistem Persamaan Linear dengan Metode Augmented Matrix

Sistem Persamaan Linear dapat disajikan dalam bentuk metrik dengan beberapa ketentuan. Pembelajaran dalam matematika sekolah belum menggunakan metode ini karena masih dirasa terlalu rumit atau sulit. Buku ini menyajikan metode *Augmented Matrix* sebagai pengetahuan tambahan yang dapat digunakan solusi lain selain metode eliminasi dan distribusi.

Contoh:

Diberikan suatu Sistem Persamaan Linear:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$$

$$2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1$$

$$3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0$$

Sistem Persamaan Linear di atas dapat dinyatakan dalam bentuk matrik sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Metode *Augmented Matrix* menggunakan langkah-langkah yang disebut dengan Operasi Baris Elementer (*Elementary Row Operations*), juga sering disebut OBE. OBE memiliki 3 operasi korespondensi yang dapat dipilih dalam melakukan langkah-langkah OBE.

1. Mengalikan suatu baris pada Matrik dengan konstanta bukan nol
2. Menukar 2 baris dalam matrik
3. Menjumlahkan dari suatu baris dengan perkalian konstanta pada baris lainnya yang bersesuaian

Demikian langkah-langkah dalam mencari solusi pada Sistem Persamaan Linear dengan menggunakan OBE pada kolom kanan:

Sistem Persamaan Linear**Augmented Matrix**

$$x + y + 2z = 9$$

$$2x + 4y - 3z = 1$$

$$3x + 6y - 5z = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

baris kedua = baris kedua + (-2) . baris pertama

$$x + y + 2z = 9$$

$$2y - 7z = -17$$

$$3x + 6y - 5z = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

baris ketiga = baris ketiga + (-3) . baris pertama

$$x + y + 2z = 9$$

$$2y - 7z = -17$$

$$3y - 11z = -27$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

baris kedua = $\frac{1}{2}$. baris kedua

$$x + y + 2z = 9$$

$$y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2}$$

$$3y - 11z = -27$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

baris ketiga = baris ketiga + (3) . baris kedua

$$x + y + 2z = 9$$

$$y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2}$$

$$-\frac{1}{2}z = -\frac{3}{2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Sistem Persamaan Linear

Augmented Matrix

baris ketiga = $\frac{1}{2}$. baris ketiga

$$\begin{array}{r} x + y + 2z = 9 \\ y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2} \\ z = 3 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

baris pertama = baris pertama + (-1) . baris kedua

$$\begin{array}{r} x + \frac{11}{2}z = \frac{35}{2} \\ y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2} \\ z = 3 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

baris pertama = baris pertama + $(-\frac{11}{2})$. baris ketiga

$$\begin{array}{r} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

baris kedua = baris kedua + $(\frac{7}{2})$. baris ketiga

Dari langkah demi langkah di atas dapat diperhatikan bahwa OBE bisa digunakan untuk mencari solusi atau penyelesaian dari Sistem Persamaan Linear yaitu $x = 1, y = 2, z = 3$.

Sistem Pertidaksamaan Linear

Struktur bilangan real membahas tentang sifat urutan pada himpunan bilangan real. Sifat urutan tersebut membahas tentang kedudukan dari beberapa bilangan yang menunjukkan nilai. Terdapat beberapa bentuk simbol pertidaksamaan yang menunjukkan urutan dalam suatu struktur bilangan. Adapun simbol pertidaksamaan tersebut sebagai berikut:

- < Simbol Kurang dari
- > Simbol Lebih dari
- \leq Simbol Kurang dari atau sama dengan
- \geq Simbol Lebih dari atau sama dengan

Simbol di atas menunjukkan urutan atau kedudukan dari dua buah bilangan dalam struktur bilangan real. Sifat urutan dalam bilangan real dapat didefinisikan sebagai berikut:

Diberikan a, b adalah sembarang bilangan Real, maka

- a) jika $a-b \in \mathbb{P}$, maka dinyatakan dengan $a > b$ atau $b < a$
- b) jika $a-b \in \mathbb{P} \cup \{0\}$, maka dinyatakan dengan $a \geq b$ atau $b \leq a$

Keterangan: \mathbb{P} adalah himpunan bilangan bulat positif

Pertidaksamaan linear merupakan bentuk dari pernyataan yang menunjukkan lebih dari, kurang dari, lebih dari atau sama dengan, atau kurang dari atau sama dengan pada suatu variabel yang terkandung.

Daerah yang dibatasi oleh suatu Garis Lurus dalam bidang xy dapat direpresentasikan salah satu secara aljabar dalam suatu pertidaksamaan bentuk di bawah ini,

$$a_1x + a_2y < b$$

$$a_1x + a_2y > b$$

$$a_1x + a_2y \leq b$$

$$a_1x + a_2y \geq b$$

dengan $a_1, a_2,$ dan b adalah suatu konstanta real dan a_1 dan a_2 keduanya bukan 0 (nol). Bentuk Pertidaksamaan tersebut merupakan Pertidaksamaan Linear dalam variable x dan y . Secara umum bahwa Pertidaksamaan Linear dalam n variabel $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ didefinisikan dengan salah satu bentuk berikut,

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n < b$$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n > b$$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n \leq b$$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n \geq b$$

dimana $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ dan b adalah konstanta real.

Pertidaksamaan di atas dapat dinyatakan bahwa

- a_1, a_2, a_3, a_n dinamakan Koefisien dari Variabel
- x_1, x_2, x_3, x_n dinamakan variabel
- b dinamakan bilangan konstan

Contoh Pertidaksamaan Linear:

1. $x + 2y < 8$ *pertidaksamaan linear 2 variabel*
2. $y > \frac{1}{2}x + 2z + 2$ *pertidaksamaan linear 3 variabel*
3. $3x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 \geq 12$ *pertidaksamaan linear 4 variabel*

Contoh pertidaksamaan yang tidak Linear

1. $2x + 3\sqrt{y} \leq 10$
2. $4x + 2y - z + xy \leq 10$
3. $y < \cos x$

Solusi atau Penyelesaian dari salah satu Pertidaksamaan Linear

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n < b$$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n > b$$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n \leq b$$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n \geq b$$

adalah suatu daerah yang berisi barisan n bilangan $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ yang memenuhi pertidaksamaan ketika disubstitusikan salah satu ke dalam

$$x_1 = s_1, x_2 = s_2, x_3 = s_3, \dots, x_n < s_n.$$

$$x_1 = s_1, x_2 = s_2, x_3 = s_3, \dots, x_n > s_n.$$

$$x_1 = s_1, x_2 = s_2, x_3 = s_3, \dots, x_n \leq s_n.$$

$$x_1 = s_1, x_2 = s_2, x_3 = s_3, \dots, x_n \geq s_n.$$

Himpunan Solusi atau Penyelesaian Umum adalah himpunan semua solusi atau penyelesaian dari suatu pertidaksamaan.

Sistem Pertidaksamaan Linear

Suatu himpunan terbatas dengan elemen lebih dari satu pertidaksamaan linear dalam variabel $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ disebut **Sistem Pertidaksamaan Linear**. Sistem Pertidaksamaan Linear merupakan satu kesatuan yang terdiri dari lebih dari satu pertidaksamaan linear.

Contoh Sistem Pertidaksamaan Linear

$$4x + 3y \leq 400$$

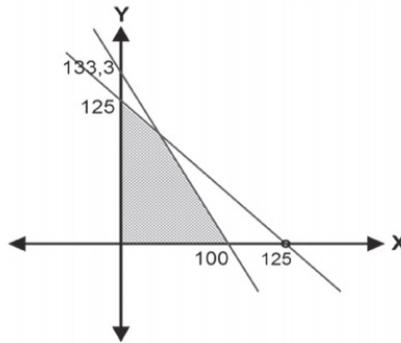
$$x + y \leq 125$$

Sistem Pertidaksamaan Linear di atas dapat dicari solusi yang memenuhi kedua pertidaksamaan dengan cara menggunakan konsep Sistem Persamaan Linear.

$$4x + 3y \leq 400 \quad \text{dikalikan } 1 \quad 4x + 3y = 400$$

$$x + y \leq 125 \quad \text{dikalikan } 3 \quad x + 3y = 375$$

setelah persamaan di atas dieliminasi dan disubstitusi maka didapat nilai $x = 25$ dan $y = 100$



Gambar 3 Daerah Penyelesaian untuk Sistem Pertidaksamaan Linear

Kemudian Sistem Persamaan Linear tersebut digambar pada diagram kartesius dan dicari daerah penyelesaiannya dengan menggunakan Sistem Pertidaksamaan Linear kembali.

Penyelesaian Sistem Pertidaksamaan Linear dapat dilihat pada daerah yang diarsir dalam gambar 3. Dapat disimpulkan bahwa Himpunan Penyelesaian dari Sistem Pertidaksamaan Linear.

$$4x + 3y \leq 400$$

$$x + y \leq 125$$

adalah $H_p = \{(x, y) \mid x \leq 100 \text{ atau } y \leq 125, (x, y) \in \mathbb{R}\}$

Latihan

1. Diberikan suatu Sistem Persamaan Linear,

$$x + y + 2z = a$$

$$x + z = b$$

$$2x + y + 3z = c$$

Tentukan nilai a, b, c jika memenuhi persamaan $c = a + b$.

2. Tentukan Himpunan Penyelesaian Sistem Persamaan Linear dengan metode *augmented matrix*.

a) $3x_1 - 2x_2 = -1$

$$4x_1 + 5x_2 = 3$$

$$7x_1 + 3x_2 = 2$$

b) $2x_1 + 2x_3 = 1$

$$3x_1 - x_2 + 4x_3 = 7$$

$$6x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

c) $x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 1$

$$3x_2 + x_3 - x_5 = 2$$

$$x_3 + 7x_4 = 1$$

3. Tentukan Himpunan Penyelesaian dan gambarkan grafik pertidaksamaan dari Sistem Pertidaksamaan Linear berikut.

a) $x_1 - y \geq 3$

$$5x_1 + 3x_2 \geq 9$$

b) $2x_1 + 5x_2 \leq 600$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 530$$

$$2x_1 + x_2 \leq 240$$

4. Seorang penjual beras, mencampur tiga jenis beras. Campuran beras pertama terdiri dari 1 kg jenis *A*, 2 kg jenis *B*, dan 3 kg jenis *C* dijual dengan harga Rp19.500,00. Campuran beras kedua terdiri dari 2 kg jenis *A* dan 3 kg jenis *B* dijual dengan harga Rp 19.000,00. Campuran beras ketiga terdiri dari 1 kg jenis *B* dan 1 kg jenis *C* dijual dengan harga Rp 6250,00. Harga beras jenis mana yang paling mahal?

5. Sekelompok tani transmigran mendapatkan 6 ha tanah yang dapat ditanami padi, jagung, dan palawija lain. Karena keterbatasan sumber daya, petani harus menentukan berapa

bagian yang harus ditanami padi dan berapa bagian yang harus ditanami jagung, sedangkan palawija lainnya ternyata tidak menguntungkan. Dalam suatu masa tanam tenaga yang tersedia hanya 1590 jam/orang. Pupuk juga terbatas, tak lebih dari 480 kg, sedangkan air dan sumber daya lainnya dianggap cukup tersedia. Diketahui pula bahwa untuk menghasilkan 1 kuintal padi diperlukan 12 jam-orang tenaga dan 4 kg pupuk, dan untuk 1 kuintal jagung diperlukan 9 jam-orang tenaga dan 2 kg pupuk. Kondisi tanah memungkinkan menghasilkan 50 kuintal padi per ha atau 20 kuintal jagung per ha. Pendapatan petani dari 1 kuintal padi adalah Rp 32.000 sedang dari 1 kuintal jagung Rp 20.000, dan dianggap bahwa semua hasil tanamnya selalu habis terjual. Masalah bagi petani ialah bagaimanakah rencana produksi yang memaksimumkan pendapatan total? Artinya berapa ha tanah ditanami padi dan berapa ha tanah ditanami jagung?

6. Seekor ikan mas memiliki ekor yang panjangnya sama dengan Panjang kepala ditambah seperlima Panjang tubuhnya, Panjang tubuhnya empat perlima dari Panjang keseluruhan ikan, jika Panjang kepala ikan 5 cm, Berapakah Panjang keseluruhan ikan tersebut?

GEOMETRI

Kata geometri berasal dari kata Yunani geos (artinya bumi) dan metron (artinya ukuran). Orang Mesir kuno, Cina, Babilonia, Romawi, dan Yunani menggunakan geometri untuk survei, navigasi, astronomi, dan pekerjaan praktis lainnya. Orang Yunani berusaha mensistematisasikan fakta-fakta geometris yang mereka ketahui dengan menetapkan alasan logis untuk mereka dan hubungan di antara mereka. Pekerjaan orang-orang seperti Thales (600 SM), Pythagoras (540 SM), Plato (390 SM), dan Aristoteles (350 SM) dalam sistematisasi fakta dan prinsip geometri yang berpuncak pada elemen teks geometri, yang ditulis pada sekitar 325 SM. oleh Euclid. Teks paling luar biasa ini telah digunakan selama lebih dari 2000 tahun. Pada pembahasan Geometri di bawah ini disadur dari buku "*Geometry Fourth Edition SCHAUM'S Outlines*" (Rich dan Thomas, 2009) dan "*The Four Pillars of Geometry*" (Stillwell, 2005).

Euclides merupakan seorang matematikawan dari Alexandria, Mesir pada tahun sekitar 4 abad sebelum masehi. Euclides dijuluki sebagai bapak Geometri atas dasar pemikirannya terhadap teori bilangan dan geometri yang dikemukakan pada buku yang berjudul "*Elemen*". Pada dasarnya Euclid memiliki pemikiran tentang geometri dalam suatu konstruksi tertentu yang disebut aksioma atau postulat. Aksioma dasar yang dikemukakan ada 3, yaitu:

1. Suatu segmen garis lurus dapat dibentuk oleh 2 titik
2. Perpanjangan dari segmen garis lurus tak terbatas
4. Suatu lingkaran memiliki pusat dan jari-jari tertentu

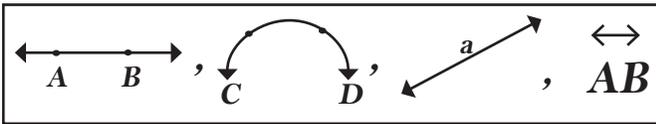
Istilah Geometri yang takterdefinisi (Undefined): Titik, Garis, dan Bidang

Titik hanya memiliki posisi, tidak memiliki panjang, lebar, dan ketebalan. Titik direpresentasikan dengan *Dot* (.). Perlu diketahui

bahwa *Dot* (.) hanya merepresentasikan atau mewakili sebuah titik, tetapi bukan sebuah titik. Sebuah titik dapat disimbolkan dengan huruf kapital. Contoh:

. B (Titik B)
 . A (Titik A)

Garis hanya memiliki Panjang, tidak memiliki lebar dan ketebalan. Garis dapat direpresentasi seperti coretan pada papan tulis. Garis ditandai dengan huruf kapital pada dua titik atau huruf kecil untuk nama garis.



Gambar 4 Representasi Garis

Garis bisa berbentuk lurus, melengkung, atau kombinasi dari keduanya. Garis Lurus dihasilkan oleh titik yang selalu bergerak diarah yang sama. Garis Lengkung dihasilkan oleh titik yang selalu bergerak dalam arah yang terus berubah.



Gambar 5.1 Garis Lurus



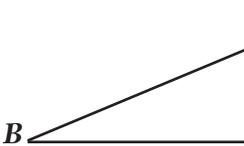
Gambar 5.2 Garis Lengkung

Permukaan (*Surface*) memiliki panjang dan lebar tetapi tidak memiliki ketebalan. Permukaan ini dapat direpresentasikan dengan papan tulis, sisi kotak, atau bagian luar bola, tetapi perlu diingat bahwa itu semua hanya representasi dari permukaan, bukan permukaannya. Permukaan Bidang (*Plane Surface or Plane*) adalah suatu permukaan sedemikian rupa sehingga suatu garis menghubungkan dua titik yang seluruhnya terletak di dalamnya.

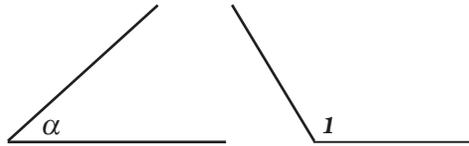
Sudut

Sudut (*angle*) adalah suatu sosok yang dibentuk oleh dua sinar dengan titik ujung yang sama. Sinar adalah sisi-sisi sudut, sedangkan titik akhir adalah puncaknya (*vertex*). Simbol sudut adalah \angle atau \sphericalangle . Sudut dapat diberi nama dengan salah satu berikut:

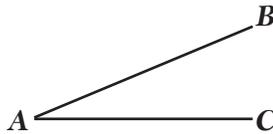
1. Dengan huruf puncak, jika hanya ada satu sudut yang memiliki simpul (contoh Gambar 6.1).
2. Dengan huruf kecil atau angka yang ditempatkan di antara sisi sudut dan dekat titik sudut (contoh Gambar 6.2).
3. Dengan tiga huruf kapital, sehingga huruf puncak berada diantara dua yang lain, satu dari setiap sisi sudut (contoh Gambar 6.3).



Gambar 6.1 Sudut $\angle B$

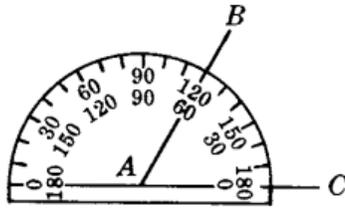


Gambar 6.2 Sudut $\angle \alpha$ dan Sudut $\angle 1$



Gambar 6.3 Sudut $\angle BAC$

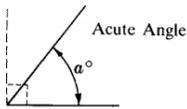
Besar kecilnya sudut tergantung pada sejauh mana satu sisi sudut harus diputar pada suatu titik sampai bertemu dengan sisi lainnya. Satuan ukuran untuk sudut adalah Derajat (*Degrees*). Besar sudut adalah banyaknya derajat yang terkandung pada suatu sudut. Alat untuk mengukur sudut dinamakan busur seperti gambar 7 dan dapat dinyatakan $m \angle BAC = 60^\circ$.



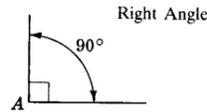
Gambar 7 Busur

Sudut juga dibagi oleh beberapa macam sesuai dengan jenisnya. Adapun macam-macam sudut adalah:

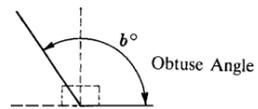
1. Sudut Lancip (*acute*), adalah sudut yang ukurannya kurang dari 90° .
2. Sudut Siku-siku (*Right angle*), adalah sudut yang ukurannya sama dengan 90° .
3. Sudut Tumpul (*Obtuse angle*), adalah sudut yang ukurannya lebih dari 90° dan kurang dari 180° .



Gambar 8.1 Sudut Lancip

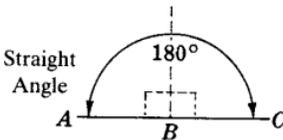


Gambar 8.2 Sudut Siku-siku

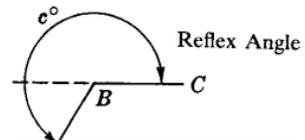


Gambar 8.3 Sudut Tumpul

4. Sudut Lurus (*Straight angle*) adalah sudut yang berukuran sama dengan 180° .
5. Sudut Reflek (*Reflex angle*) adalah sudut yang berukuran lebih besar dari 180° dan kurang dari 360° .



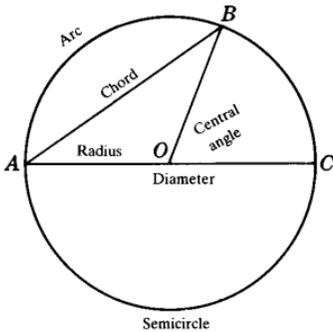
Gambar 9.1 Sudut Lurus



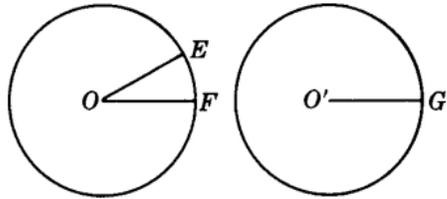
Gambar 9.2 Sudut Reflek

Lingkaran

Lingkaran adalah suatu himpunan semua titik pada suatu bidang yang memiliki jarak sama dengan titik pusat. Simbol dari lingkaran adalah \odot . Sedangkan $\odot O$ adalah simbol dari lingkaran dengan pusat O . Keliling (*circumference*) dari lingkaran adalah jarak sepanjang titik-titik terluar yang memenuhi 360° .



Gambar 10.1 Istilah bagian pada lingkaran

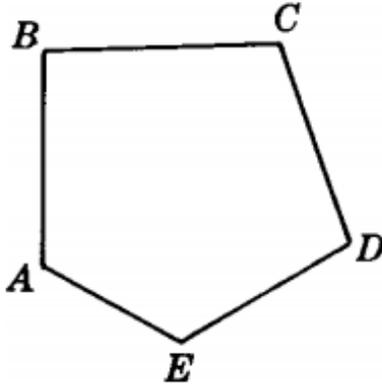


Gambar 10.2 Lingkaran yang kongruen

Jari-jari (*Radius*) adalah suatu segmen yang menghubungkan pusat lingkaran dengan sebuah titik pada lingkaran ($OA, OB, OC, OE, OF, O'G$). Tali Busur atau disebut juga *Chord* adalah segmen garis yang menghubungkan dua titik pada lingkaran (AB). Diameter adalah tali busur atau *chord* yang menembus pusat lingkaran sehingga tali busur tersebut terpanjang dengan dua kali panjang jari-jari (AC). Busur (*arc*) adalah bagian berkelanjutan dari sebuah lingkaran (\overline{AB}). Setengah Lingkaran (*semicircle*) adalah busur yang memiliki Panjang setengah dari keliling lingkaran yang memenuhi 180° (\overline{AB}). Sudut Pusat (*central angle*) adalah sebuah sudut yang dibentuk dari dua jari-jari ($\angle BOC, \angle AOC, \angle EOF$). Lingkaran yang kongruen (*congruent circles*) adalah dua atau lebih lingkaran yang memiliki jari-jari kongruen ($\odot O$ dan $\odot O'$).

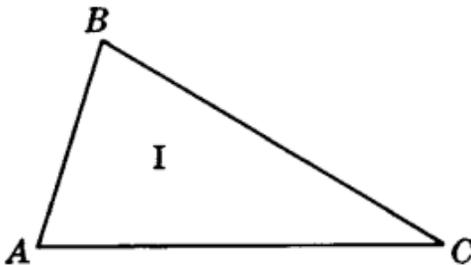
Segitiga (triangle)

Poligon (*polygon*) adalah sosok bidang tertutup yang dibatasi oleh ruas garis lurus sebagai sisi. Gambar 11 adalah poligon lima sisi, yang disebut *pentagon* dan dinamakan segi lima ABCDE, menggunakan huruf-hurufnya secara berurutan.



Gambar 11 Poligon lima sisi atau pentagon

Segiempat (*quadrilateral*) adalah poligon yang memiliki empat sisi. Segitiga (*triangle*) adalah poligon yang memiliki tiga sisi. Titik puncak segitiga adalah titik pertemuan dua sisi. Simbol dari segitiga adalah \triangle dan dapat ditunjukkan juga dengan $\triangle ABC$ atau $\triangle I$.



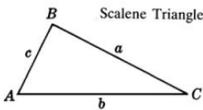
Gambar 12 Poligon Segitiga ABC

Mengklasifikasikan Segitiga

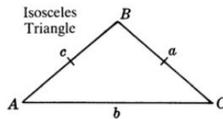
Segitiga diklasifikasikan menurut persamaan panjang sisinya atau menurut jenis sudut yang dimilikinya.

Segitiga Menurut Kesetaraan Panjang Sisi-sisinya diklasifikasikan menjadi 3 klasifikasi, yaitu:

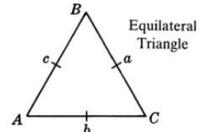
1. Segitiga tak sama Panjang/Segitiga Sembarang (*Scalene triangle*) adalah Segitiga yang tidak memiliki sisi yang sama atau kongruen
2. Segitiga sama kaki (*Isosceles triangle*) adalah segitiga yang memiliki setidaknya 2 sisi yang sama panjang atau kongruen
3. Segitiga sama sisi (*Equilateral triangle*) adalah segitiga yang memiliki 3 sisi yang sama Panjang atau kongruen.



Gambar 13.1 Segitiga Sembarang



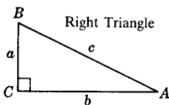
Gambar 13.2 Segitiga Sama Kaki



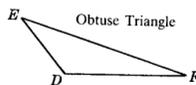
Gambar 13.2 Segitiga Sama Sisi

Segitiga Menurut Jenis Sudutnya diklasifikasikan menjadi 3 klasifikasi, yaitu:

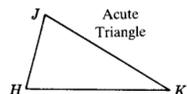
1. Segitiga Siku-siku (*Right triangle*) adalah segitiga yang salah satu sudutnya memiliki besar 90° .
2. Segitiga Tumpul (*Obtuse triangle*) adalah segitiga yang salah satu sudutnya memiliki besar lebih dari 90° .
3. Segitiga Lancip (*Acute triangle*) adalah segitiga yang ketiga sudutnya memiliki besar kurang dari 90° .



Gambar 14.1 Segitiga Siku-siku



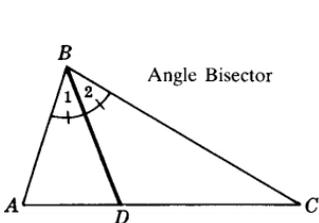
Gambar 14.2 Segitiga Tumpul



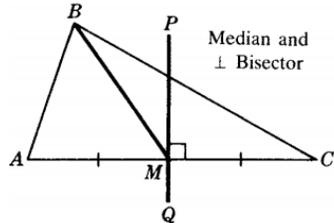
Gambar 14.3 Segitiga Lancip

Garis Khusus dalam Segitiga

1. Garis Bagi dari segitiga (*Angle bisector of a triangle*) adalah suatu segmen garis atau sinar garis yang membagi sudut menjadi 2 bagian yang sama besar.
2. Garis Tengah Segitiga (*Median of a triangle*) adalah suatu ruas garis dari puncak ke titik tengah sisi yang berlawanan dengan membagi sisi menjadi dua sama Panjang. Garis BM pada gambar 15.2 adalah garis tengah segitiga pada sisi AC.

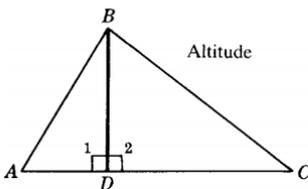


Gambar 15.1 Garis Bagi Segitiga

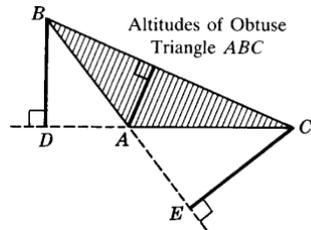


Gambar 15.2 Garis Tengah Segitiga

3. Bisektor tegak lurus dari sisi segitiga (*Perpendicular bisector of a side*) adalah garis yang membagi dua dan tegak lurus ke suatu sisi. Garis PQ pada gambar 15.2 adalah contoh dari Bisektor tegak lurus dari sisi segitiga.
4. Tinggi Segitiga (*Altitude to a side of a triangle*) adalah segmen garis dari titik tegak lurus ke sisi yang berlawanan.
5. Tinggi Segitiga Tumpul (*Altitudes of obtuse triangle*) adalah Dalam segitiga tumpul, ketinggian yang ditarik ke kedua sisi sudut tumpul berada di luar segitiga.



Gambar 16.1 Tinggi Segitiga



Gambar 16.1 Tinggi Segitiga Tumpul

PENGUKURAN

Pengukuran. Pembelajaran pengukuran sangat penting dalam kurikulum matematika sekolah karena kepraktisan dan kemudahannya dalam banyak aspek kehidupan. Standar Pengukuran mencakup pemahaman tentang atribut, unit, sistem, dan proses pengukuran serta penerapan teknik, alat, dan rumus untuk menentukan pengukuran. Pengukuran dapat berfungsi sebagai cara untuk mengintegrasikan untaian matematika yang berbeda karena pengukuran menawarkan peluang untuk mempelajari dan menerapkan bidang matematika lain seperti bilangan, geometri, fungsi, dan gagasan statistik. Pembahasan dalam Pengukuran ini disadur dari “*Principle and Standarts for School Mathematics*” (NCTM, 2000) dan “*Executive Summary Principles and Standarts For School Mathematics*” (NCTM, 2010).

Peluang untuk menggunakan dan memahami pengukuran muncul secara alami selama sekolah menengah di bidang matematika, sains, dan pendidikan teknis. Mengukur jumlah putaran per menit mesin, jarak yang sangat jauh dalam astronomi, atau jarak molekul mikroskopis memperluas fasilitas siswa dengan pengukuran turunan dan pengukuran tidak langsung. Instrumen pengukuran berbasis kalkulator dan komputer memfasilitasi pengumpulan, penyimpanan, dan analisis data pengukuran waktu nyata. Melalui penskalaan logaritmik, siswa dapat secara grafis mewakili rentang pengukuran yang relatif besar. Pemahaman tentang rumus untuk volume atau luas permukaan kerucut atau bola dapat diperoleh dengan menerapkan metode pendekatan yang berurutan. Aspek pengukuran ini, bersama dengan pertimbangan presisi dan kesalahan dan ini penting untuk menjadi pengalaman bagi siswa sekolah menengah.

Pengukuran harus memberikan kepada siswa tentang memahami sifat pengukuran dari objek dan unit, sistem, dan

proses pengukuran dan menerapkan teknik, alat, dan rumus yang sesuai untuk menentukan pengukuran. Dengan memahami sifat pengukuran diharapkan siswa mampu untuk membuat keputusan tentang unit dan skala yang sesuai untuk situasi masalah yang melibatkan pengukuran.

Memahami Sifat Pengukuran dari Objek dan Unit, Sistem, dan Proses Pengukuran

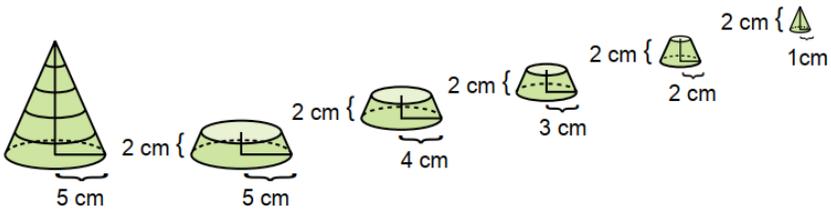
Siswa harus memahami benar tentang sifat dalam ekspresi pengukuran saat mereka sudah memasuki sekolah menengah. Contohnya: Mobil dan bus berjalan dengan kecepatan yang dinyatakan dalam mil per jam atau kilometer per jam, pertumbuhan tanaman dicatat dalam sentimeter per hari, dan angka kelahiran sering dilaporkan dalam kelahiran per 1000 orang. Pada saat siswa mencapai sekolah menengah, mereka harus siap membuat keputusan yang tepat tentang bagaimana kuantitas harus diukur dan direpresentasikan, tergantung pada situasi dan masalah yang dipertimbangkan. Misalnya, kecepatan seekor serangga yang diukur sebagai 4 sentimeter per detik lebih mudah dipahami daripada kecepatan 0,00004 kilometer per detik, walaupun keduanya sama. Siswa memperluas pemahaman mereka tentang pengukuran dalam sains, di mana banyak pengukuran bersifat tidak langsung. Misalnya, mereka dapat menentukan ketinggian jembatan jika mereka tahu bahwa dibutuhkan waktu tiga detik untuk bola jatuh dari jembatan dan mengenai air di bawahnya.

Kemajuan Teknologi penggunaan kalkulator dan komputer untuk mengumpulkan dan menampilkan data, siswa harus memahami bahwa pilihan skala dan apa yang tampak pada layar menjadi pilihan penting. Misalnya, garis $f(x) = x$ tampak memotong dua sumbu koordinat pada sudut 45 derajat hanya jika skala horizontal dan vertikal sama. Demikian pula, lingkaran

yang dilihat pada layar dengan perbedaan skala horizontal dan vertikal terlihat seperti elips. Perilaku lokal dan global dari suatu fungsi yang ditampilkan di jendela tampilan yang berbeda dapat terlihat sangat berbeda, terkadang perbedaan kecil dalam pilihan dapat menyebabkan perbedaan yang signifikan dalam pesan visual. Guru dapat membantu siswa memahami cara membuat pilihan strategis tentang skala dan jendela tampilan sehingga mereka dapat memecahkan masalah yang mereka tangani dengan paling efektif.

Menerapkan Teknik, Alat, dan Rumus yang Sesuai untuk Menentukan Pengukuran

Cara pengukuran sangat penting dalam membantu membangun suatu ide yang semakin rumit. Pengukuran beberapa besaran dapat ditentukan oleh urutan perkiraan yang semakin akurat. Misalnya, siswa sedang mencari cara untuk mencari volume benda padat tiga dimensi. Siswa harus mengetahui bahwa volume silinder siku-siku adalah hasil kali dari tinggi silinder dan luas alasnya. Jadi volume silinder lingkaran adalah $\pi r^2 h$, di mana r adalah jari-jari alasnya dan h adalah tingginya. Tetapi bagaimana siswa dapat menentukan volume kerucut? Ini dapat menjadi dasar dari perkiraan pengukuran yang semakin akurat.



Sebagai ilustrasi, kerucut kiri yang ditunjukkan pada gambar 17 memiliki radius alas 5 sentimeter dan tinggi 10 sentimeter. Dengan menggunakan segitiga yang serupa, siswa harus dapat

melihat bahwa mengiris kerucut yang sejajar dengan alas dengan interval 2 sentimeter akan menghasilkan empat cakram yang hampir berbentuk silinder dan sebuah kerucut kecil, masing-masing setinggi 2 sentimeter. Masing-masing dari kelima gambar tersebut akan muat seluruhnya di dalam silinder yang tingginya 2 sentimeter dan memiliki radius yang sama dengan penampang bawahnya. Oleh karena itu, volume kumulatifnya kurang dari $2(\pi 5^2 + \pi 4^2 + \pi 3^2 + \pi 2^2 + \pi 1^2) \text{ cm}^3 = 110\pi \text{ cm}^3$. Pada saat yang sama, masing-masing dari lima gambar merupakan subset silinder yang memiliki jari-jari penampang atasnya. Jadi volume kumulatif harus paling sedikit $2(\pi 4^2 + \pi 3^2 + \pi 2^2 + \pi 1^2 + \pi 0^2) \text{ cm}^3 = 60\pi \text{ cm}^3$. Mengulangi proses dengan irisan setebal 1 sentimeter akan membantu siswa melihat bahwa saat mereka mengambil irisan kerucut yang lebih tipis, perkiraan yang terlalu tinggi dan yang terlalu kecil dari volume menjadi semakin dekat satu sama lain. (Memang, rata-rata dari perkiraan yang terlalu rendah dan perkiraan yang terlalu tinggi dengan cepat mendekati volume sebenarnya dari $(8\frac{1}{3}) \pi \text{ cm}^3$.) Secara informal, pengalaman seperti itu berfungsi sebagai pengantar gagasan perkiraan dengan menggunakan batas atas dan bawah dan gagasan tentang batas. Apakah ide-ide ini dikejar nanti atau tidak dalam kursus formal, mereka dapat memperkenalkan cara berpikir yang kuat tentang fenomena matematika dan membantu siswa membangun keakraban dasar dengan ide-ide inti kalkulus.

ANALISIS DATA DAN PROBABILITAS

Penalaran secara statistik penting untuk menjadi warga negara dan konsumen yang terinformasi. Analisis Data dan Standar Probabilitas menghimbau siswa untuk merumuskan pertanyaan dan mengumpulkan, mengatur, dan menampilkan data yang relevan untuk menjawab pertanyaan ini. Selain itu, ini menekankan pada pembelajaran metode statistik yang tepat untuk menganalisis data, membuat kesimpulan dan prediksi berdasarkan data, dan memahami serta menggunakan konsep dasar probabilitas. Pembahasan pada sub bab ini materi telah disadur dari buku “*Statistics Fourth Edition*” (Spiegel dan Stephens, 2008) dan buku “*Probability and Statistics Fourth Edition*” (Spiegel, Schiller dan Srinivasan, 2013).

Statistik

Statistik berkaitan dengan metode ilmiah untuk mengumpulkan, mengatur, meringkas, menyajikan, dan menganalisis data serta dengan menarik kesimpulan yang valid dan membuat keputusan yang masuk akal berdasarkan analisis tersebut. Dalam arti yang lebih sempit, istilah statistik digunakan untuk menunjukkan data itu sendiri atau angka yang diturunkan dari data, seperti rata-rata. Jadi kita berbicara tentang statistik ketenagakerjaan, statistik kecelakaan, dll.

Seringkali dalam praktiknya bahwa untuk menarik kesimpulan yang valid tentang sekelompok besar individu atau objek. Alih-alih memeriksa seluruh kelompok, yang disebut populasi (*population*), yang mungkin sulit atau tidak mungkin dilakukan, sedangkan kegiatan memeriksa hanya sebagian kecil dari populasi ini, yang disebut sampel (*sample*). Dengan melakukan kegiatan ini dengan tujuan menyimpulkan fakta tertentu tentang populasi dari hasil yang ditemukan dalam sampel, suatu proses yang dikenal sebagai

inferensi statistik (*statistical inference*). Proses pengambilan sampel disebut pengambilan sampel (*sampling*).

Dalam mengumpulkan data mengenai karakteristik sekelompok individu atau objek, seperti tinggi dan berat mahasiswa di suatu universitas atau jumlah baut rusak dan tidak rusak yang diproduksi di pabrik pada hari tertentu, seringkali tidak mungkin atau tidak praktis untuk diamati seluruh kelompok, terutama jika jumlahnya besar. Alih-alih memeriksa seluruh kelompok, yang disebut populasi, atau alam semesta, seseorang memeriksa sebagian kecil dari kelompok, yang disebut sampel.

Suatu populasi bisa terbatas atau tidak terbatas. Misalnya, populasi yang terdiri dari semua baut yang diproduksi di pabrik pada hari tertentu adalah terbatas, sedangkan populasi yang terdiri dari semua kemungkinan hasil (kepala, ekor) dalam lemparan koin berturut-turut tidak terbatas. Jika sampel mewakili populasi, kesimpulan penting tentang populasi sering kali dapat disimpulkan dari analisis sampel. Fase statistik yang menangani kondisi di mana inferensi valid disebut statistik induktif, atau inferensi statistik. Karena inferensi semacam itu tidak dapat secara mutlak pasti, bahasa probabilitas sering digunakan dalam menyatakan kesimpulan. Fase statistik yang mencoba mendeskripsikan dan menganalisis kelompok tertentu tanpa menarik kesimpulan atau kesimpulan tentang kelompok yang lebih besar disebut statistik deskriptif, atau deduktif (*descriptive, or deductive, statistics*)

Index, or Subscript, Notation

Biarkan simbol X_j (baca “ X sub j ”) menunjukkan sembarang N yang bernilai $X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$ diasumsikan oleh variabel X . Huruf j dalam X_j , yang mewakili salah satu angka $1, 2, 3, \dots, N$ disebut *subskript*, atau *index*. Jelas semua huruf selain j , seperti i, k, p, q , atau s , juga bisa digunakan.

Simbol $\sum_{j=1}^N X_j$, digunakan untuk menunjukkan jumlah semua X_j dari $j = 1$ sampai $j = N$; yang didefinisikan,

$$\sum_{j=1}^N X_j = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_N$$

Simbol Σ adalah huruf kapital Yunani (*Greek*) yang dinamakan “*Sigma*” yang menunjukkan penjumlahan.

Rata-rata (*average*) adalah nilai yang khas, atau representatif, dari sekumpulan data. Karena nilai tipikal seperti itu cenderung terletak secara terpusat di dalam kumpulan data yang disusun menurut besarnya, rata-rata juga disebut ukuran tendensi sentral (*measures of central tendency*). Beberapa jenis rata-rata dapat didefinisikan, yang paling umum adalah mean aritmatika (*arithmetic mean*), median (*median*), mode (*mode*), mean geometric (*geometric mean*), dan mean harmonic (*harmonic mean*). Masing-masing memiliki kelebihan dan kekurangan, tergantung datanya dan tujuan yang dimaksudkan.

Pengumpulan Data

Suatu kegiatan mencatat peristiwa, karakteristik, elemen, nilai suatu variabel merupakan suatu kegiatan mengumpulkan data. Pengumpulan data bertujuan untuk mengetahui atau mempelajari suatu masalah atau variabel penelitian. Pengumpulan data dapat dilakukan dengan melihat jenis data. Data yang dikumpulkan bisa saja data primer ataupun data sekunder. Data primer merupakan data yang langsung diambil dari objek penelitian sedangkan data sekunder diambil dari tangan kedua yang telah mengumpulkan data sebelumnya. Pengumpulan data dapat dilakukan dengan beberapa instrument diantaranya tes, wawancara, pemberian angket, observasi, dokumentasi, skala.

Data yang telah terkumpul dapat disajikan dalam beberapa bentuk penyajian data. Penyajian data memiliki manfaat untuk mempermudah analisis dari data-data yang telah diperoleh. Penyajian data dibedakan menjadi 2 yaitu tabel distribusi frekuensi, dan Grafik dan tabel.

1. *Distribusi Frekuensi*

Penyajian data dengan cara mengelompokkan data dalam kelas-kelas interval dengan frekwensi tertentu disebut penyajian data tabel distribusi frekuensi. Penyajian data berdasarkan distribusi frekuensi dapat dibedakan menjadi 2 yaitu Tabel distribusi frekuensi relatif dan tabel distribusi frekuensi kumulatif.

Tabel distribusi frekuensi relative data tunggal merupakan cara untuk menyusun data yang relatif sedikit. Pada penyajian data ini tidak terdapat interval sehingga hanya terdapat data secara masing-masing atau tunggal. Perhatikan contoh data berikut:

7, 4, 10, 8 8, 8, 4, 4, 4, 6, 6 6, 6, 5, 5, 5, 3, 6, 6, 6
8, 7, 7, 7, 5, 8, 9, 6, 5, 6, 7, 4, 4, 5, 7, 7, 4, 8, 7, 6

Data di atas merupakan contoh data tunggal dan merupakan *Distribusi Frekuensi Tunggal*. Penyajian data seperti di atas sangat membuat orang atau pembaca mengalami kebingungan. Untuk mempermudah dalam memahami suatu data maka perlu dibuatkan suatu tabel Distribusi Frekuensi yang memuat suatu Tally (Turus) sebagai berikut:

NILAI	TALLY (TURUS)	FREKUENSI
3		1
4		7
5		6
6		10

NILAI	TALLY (TURUS)	FREKUENSI
7		8
8		6
9		1
10		1

Dalam suatu contoh peristiwa Tabel distribusi frekuensi digunakan untuk menyusun data dengan suatu interval. Interval-interval kelas yang disusun memiliki Panjang yang sama. Panjang interval menunjukkan selisih nilai atas interval dan nilai bawah interval. Perhatikan contoh data hasil nilai pengerjaan tugas Matematika dari 40 siswa kelas IPA berikut ini.

80 79 73 73 70 74 72 72 74 70
 77 75 74 72 79 78 75 75 66 71
 75 76 74 73 71 72 74 74 71 70
 73 67 72 72 75 74 74 68 69 80

Dari data di atas dapat disajikan dalam bentuk Distribusi frekuensi berkelompok dengan langkah-langkah sebagai berikut:

- Mengelompokkan ke dalam interval-interval kelas yang sama panjang, misalnya 65–67, 68–70, ..., 80–82. Data 66 masuk dalam kelompok 65–67.
- Membuat turus (*tally*), untuk menentukan sebuah nilai termasuk ke dalam kelas yang mana.
- Menghitung banyaknya turus pada setiap kelas, kemudian menuliskan banyaknya turus pada setiap kelas sebagai frekuensi data kelas tersebut. Tulis dalam kolom frekuensi.
- Ketiga langkah di atas direpresentasikan pada tabel berikut ini:

NILAI	TITIK TENGAH	TURUS	FREKUENSI
65-67	66		2
68-70	69		5
71-73	72		13
74-76	75		14
77-79	78		4
80-82	81		2
Jumlah			40

Istilah-istilah yang banyak digunakan dalam pembahasan distribusi frekuensi berkelompok antara lain sebagai berikut.

a. Interval Kelas

Tiap-tiap kelompok disebut interval kelas atau sering disebut interval atau kelas saja. Dalam contoh sebelumnya memuat enam interval ini.

65–67, dinamakan dengan Interval kelas pertama

68–70, dinamakan dengan Interval kelas kedua

71–73, dinamakan dengan Interval kelas ketiga

74–76, dinamakan dengan Interval kelas keempat

77–79, dinamakan dengan Interval kelas kelima

80–82, dinamakan dengan Interval kelas keenam

b. Batas Kelas

Berdasarkan tabel distribusi frekuensi di atas, angka 65, 68, 71, 74, 77, dan 80 merupakan batas bawah dari tiap-tiap kelas, sedangkan angka 67, 70, 73, 76, 79, dan 82 merupakan batas atas dari tiap-tiap kelas.

c. Tepi Kelas (Batas Nyata Kelas)

Untuk mencari tepi kelas dapat dipakai rumus berikut ini.

$$\text{Tepi bawah} = \text{batas bawah} - 0,5$$

$$\text{Tepi atas} = \text{batas atas} + 0,5$$

Dari tabel di atas maka tepi bawah kelas pertama 64,5 dan tepi atasnya 67,5, tepi bawah kelas kedua 67,5 dan tepi atasnya 70,5 dan seterusnya.

d. Panjang kelas

Untuk mencari lebar kelas dapat dipakai rumus:

$$\text{Lebar kelas} = \text{tepi atas} - \text{tepi bawah}$$

Jadi, lebar kelas dari tabel di atas adalah $67,5 - 64,5 = 3$.

e. Titik Tengah

Untuk mencari titik tengah dapat dipakai rumus:

$$\text{Titik tengah} = \frac{1}{2} (\text{batas atas} + \text{batas bawah})$$

Dari tabel di atas:

$$\text{titik tengah kelas pertama} = \frac{1}{2} (67 + 65) = 66$$

$$\text{titik tengah kedua} = \frac{1}{2} (70 + 68) = 69$$

dan seterusnya.

Hasil pengolahan data dalam dilakukan penafsiran dengan bantuan suatu alat atau parameter. Pengolahan data diperoleh dari suatu penelitian yang akan menghasilkan suatu gejala tertentu. Ukuran tersebut ialah ukuran pemusatan (tendensi sentral), ukuran lokasi, dan ukuran dispersi (penyimpangan).

Ukuran Pemusatan

Ukuran pemusatan data adalah nilai tunggal dari data yang dapat memberikan gambaran yang lebih jelas dan singkat tentang

pusat data yang juga mewakili seluruh data. Ukuran pemusatan data dapat digunakan untuk menganalisis data lebih lanjut. Ada beberapa macam ukuran pemusatan data, antara lain rata-rata (mean), median, dan modus.

Rata-rata (Mean)

Mean adalah nilai rata-rata dari beberapa buah data. Nilai mean dapat ditentukan dengan membagi jumlah data dengan banyaknya data. Mean merupakan suatu ukuran pemusatan data. Mean merupakan wakil kumpulan data atau nilai arata-rata yang dianggap suatu nilai yang paling dekat dengan hasil ukuran yang sebenarnya. Mean suatu data juga merupakan statistik karena mampu menggambarkan bahwa data tersebut berada pada kisaran mean data tersebut. Mean tidak dapat digunakan sebagai ukuran pemusatan untuk jenis data nominal dan ordinal. Rata-rata (Mean) terbagi menjadi rata-rata hitung dari data tunggal, rata-rata hitung dari data yang telah dikelompokkan, rata-rata geometris dari data tunggal, rata-rata geometris dari data yang dikelompokkan, rata-rata harmonis data tunggal, dan rata-rata harmonis data yang dikelompokkan.

a. Rata-rata Hitung dari Data Tunggal

Rata-rata hitung dari data tunggal dapat diperoleh dengan cara menjumlahkan seluruh nilai dan membaginya dengan banyaknya data. Rata-rata hitung dari data tunggal dirumuskan dengan:

$$\chi = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \dots + \chi_n \quad \text{atau} \quad \chi = \frac{\sum_{i=1}^n 1}{n}$$

Keterangan:

χ = rata-rata

$$\sum_{i=1}^n X_i = \text{jumlah seluruh data}$$

n = banyaknya data

b. Rata-rata Hitung dari Data Berkelompok

Rata-rata untuk data yang telah dikelompokkan pada hakikatnya sama dengan menghitung rata-rata data pada distribusi frekuensi tunggal dengan mengambil titik tengah kelas sebagai x_i . rata-rata hitung data yang sudah dikelompokkan dapat dicari dengan menggunakan rata-rata sementara, yaitu dengan mengambil x_i dengan frekuensi terbanyak dan memberi tanda Q yang dinyatakan dengan rumus:

Keterangan:

$$\chi = \chi_0 + \frac{P}{n} \sum f_i C_i$$

χ_0 = rata-rata sementara

P = panjang kelas

n = banyaknya data

Nilai Tengah (Median)

Pengertian Nilai Tengah (Median)

Nilai Tengah atau Median ialah suatu nilai atau suatu angka yang membagi suatu distribusi data ke dalam dua bagian yang sama besar. Nilai Tengah atau Median adalah nilai atau angka yang di atas nilai atau angka tersebut terdapat $\frac{1}{2}n$ dan di bawahnya juga terdapat $\frac{1}{2}n$. Itulah sebabnya nilai ini dikenal sebagai Nilai Tengah atau Nilai Posisi Tengah, yaitu nilai yang menunjukkan pertengahan dari suatu distribusi data.

Median Data Tidak Berkelompok

Median data tidak berkelompok adalah nilai data yang letaknya ditengah kelompok data yang sudah diurutkan. Menentukan Median harus dilihat dulu jumlah data yang ada. Data tersebut berjumlah ganjil atau genap.

Untuk data n ganjil

Bila k adalah bilangan konstanta, maka: definisi bilangan ganjil adalah $n = 2k + 1$

atau

$$k = \frac{n - 1}{2}$$

Sehingga nilai Median adalah X_{k+1}

Untuk data n genap

Bila k adalah bilangan konstanta maka definisi bilangan genap adalah $n = 2k$ atau

$$k = \frac{n}{2}$$

Sehingga nilai Median adalah

$$\frac{X_k + X_{k+1}}{2}$$

Aplikasi dalam Pembelajaran Matematika Sekolah

Program pembelajaran untuk Analisis Data dan Probabilitas harus memungkinkan peserta didik untuk bisa:

1. Merumuskan pertanyaan yang dapat ditangani dengan data dan mengumpulkan, mengatur, dan menampilkan data yang relevan untuk menjawabnya
 - a) memahami perbedaan di antara berbagai jenis studi dan jenis kesimpulan mana yang secara sah;

- b) mengetahui karakteristik studi yang dirancang dengan baik, termasuk peran pengacakan dalam survei dan eksperimen;
- c) memahami arti data pengukuran dan data kategorik, data *univariat* dan *bivariat*, dan istilah variabel;
- d) memahami histogram, plot kotak paralel, dan diagram sebar dan menggunakannya untuk menampilkan data;
- e) Menghitung statistik dasar dan memahami perbedaan antara statistik dan parameter.

Univariate: Analysis, adalah analisis yang dilakukan untuk satu variabel atau per variabel.

Bivariate: Analysis, adalah analisis yang dilakukan untuk menganalisis hubungan dua variabel atau lebih.

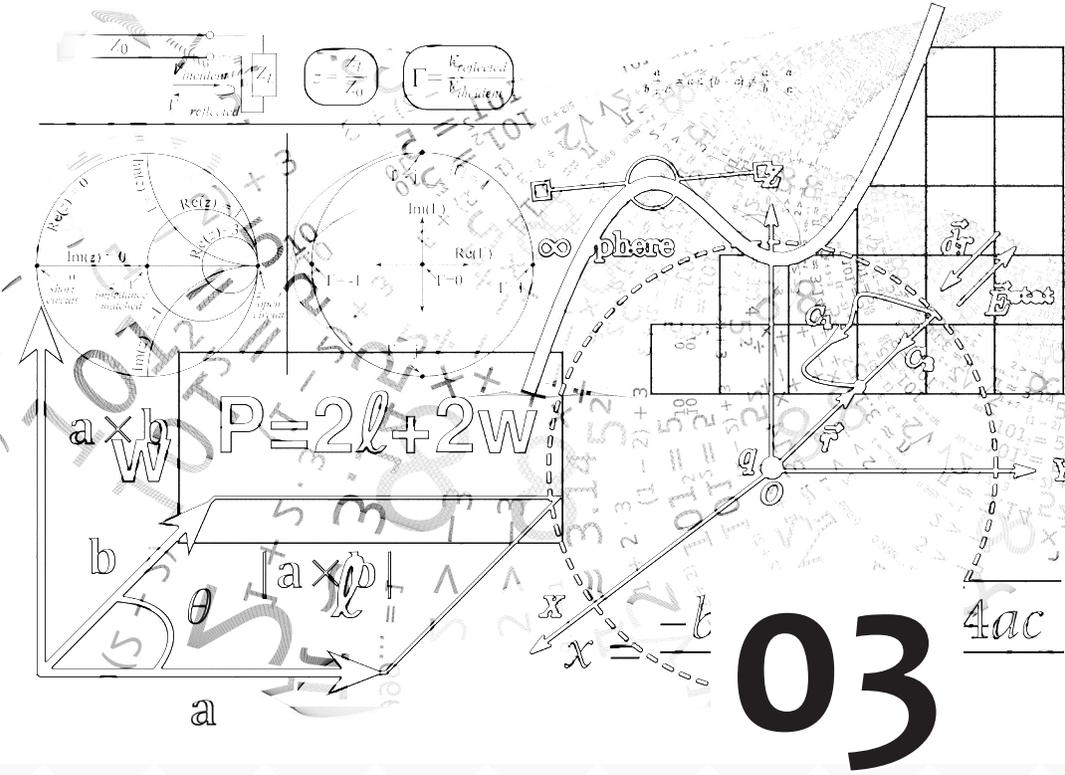
- 2. Pilih dan gunakan metode statistik yang sesuai untuk menganalisis data
 - a) untuk data pengukuran univariat, mampu menampilkan sebaran, mendeskripsikan bentuknya, serta memilih dan menghitung ringkasan statistik;
 - b) untuk data pengukuran bivariat, mampu menampilkan sebaran, mendeskripsikan bentuknya, dan menentukan koefisien regresi, persamaan regresi, dan koefisien korelasi dengan menggunakan alat teknologi;
 - c) menampilkan dan mendiskusikan data bivariat dimana setidaknya satu variabel bersifat kategorikal;
 - d) mengenali bagaimana transformasi linier dari data univariat mempengaruhi bentuk, pusat, dan penyebaran;
 - e) mengidentifikasi tren dalam data bivariat dan menemukan fungsi yang memodelkan data atau mengubah data sehingga dapat dimodelkan.

3. Kembangkan dan evaluasi kesimpulan dan prediksi yang didasarkan pada data
 - a. menggunakan simulasi untuk mengeksplorasi variabilitas statistik sampel dari populasi yang diketahui dan untuk membangun distribusi sampling;
 - b. memahami bagaimana statistik sampel mencerminkan nilai parameter populasi dan menggunakan distribusi sampling sebagai dasar untuk inferensi informal;
 - c. mengevaluasi laporan yang diterbitkan berdasarkan data dengan memeriksa desain penelitian, kesesuaian analisis data, dan validitas kesimpulan;
 - d. memahami bagaimana teknik statistik dasar digunakan untuk memantau karakteristik proses di tempat kerja.

4. Pahami dan terapkan konsep dasar probabilitas
 - a. memahami konsep ruang sampel dan distribusi probabilitas serta membangun ruang sampel dan distribusi dalam kasus sederhana;
 - b. menggunakan simulasi untuk membangun distribusi probabilitas empiris;
 - c. menghitung dan menafsirkan nilai variabel acak yang diharapkan dalam kasus sederhana;
 - d. memahami konsep probabilitas bersyarat dan peristiwa independen;
 - e. memahami cara menghitung probabilitas peristiwa gabungan.

Siswa yang kurikulum matematika disekolahnya telah sesuai dengan rekomendasi dalam Prinsip dan Standar harus merancang survei dan eksperimen sederhana, mengumpulkan data, dan membuat grafik dan meringkas data tersebut dengan berbagai cara. Mereka harus terbiasa dengan ukuran dasar pusat dan penyebaran,

mampu menggambarkan bentuk distribusi data, dan mampu menarik kesimpulan tentang satu sampel. Siswa akan menghitung probabilitas dari kejadian sederhana dan beberapa kejadian gabungan dan melakukan simulasi, membandingkan hasil simulasi dengan probabilitas yang diprediksi.



Standar Proses Matematika Sekolah

Pembelajaran matematika memiliki kekhasan dalam praktiknya. Pembelajaran matematika melibatkan banyak aspek yang harus diperhatikan. Kemampuan dalam berfikir secara matematika dan sifat pemecahan setiap kesulitan menjadi kunci dari pembelajaran matematika. Pembelajaran matematika melibatkan pemikiran yang relevan dari pemahaman peserta didik dari keahliannya materi matematika. Aspek yang dapat dipelajari dalam kegiatan pembelajaran matematika di sekolah menjadi suatu keharusan untuk diamati. Perbaikan pelaksanaan pembelajaran menjadi kunci dari perkembangan proses belajar mengajar di matematika sekolah.

NCTM memberikan standar dalam pembelajaran matematika sekolah yang diperhatikan bagi para pendidik. Standar dalam ruang ini perihal proses dari kegiatan belajar matematika yang dialami oleh peserta didik. Standar yang diberikan oleh NCTM yang menyangkut kegiatan belajar mengajar ini disebut standar proses. Standar proses berkaitan dengan proses pembelajaran matematika, yang meliputi: (A) pemecahan masalah, (B) penalaran dan bukti, (C) komunikasi, (D) koneksi (hubungan), dan (E) Representasi. Pembahasan 5 Standart Proses berikut disadur dari “*Principle and Standarts for School Mathematics*” (NCTM, 2000) dan “*Executive Summary Principles and Standarts For School Mathematics*”(NCTM, 2010).

PEMECAHAN MASALAH (PROBLEM SOLVING)

Standar Pemecahan Masalah (*Problem Solving*) menggambarkan suatu proses saat peserta didik berusaha mengembangkan ide-ide matematika. Belajar dan mengerjakan matematika saat peserta didik memecahkan masalah mungkin merupakan pesan paling penting dalam Standar pembelajaran matematika. Pemecahan

masalah merupakan suatu proses yang dapat melatih peserta didik untuk melihat struktur sampai pola dalam suatu permasalahan matematika. Standar pemecahan masalah menekankan kemampuan peserta didik untuk dapat melakukan suatu keterampilan:

1. Membangun pengetahuan matematika baru melalui pemecahan masalah
2. Memecahkan masalah yang muncul dalam matematika dan dalam konteks lain
3. Menerapkan dan mengadaptasi berbagai strategi yang tepat untuk memecahkan masalah
4. Memantau dan merefleksikan proses pemecahan masalah matematis

Matematis merupakan suatu proses yang melibatkan matematika. Kemampuan matematis merupakan kemampuan dalam melakukan sesuatu dengan melibatkan suatu konsep matematika. Pemecahan masalah sangat membutuhkan suatu kemampuan matematis untuk dapat menyusun strategi dalam memecahkan masalah tersebut.

Masalah dalam standar pemecahan masalah merupakan suatu kejadian yang tidak dapat diselesaikan dengan proses yang umum dan perlu adanya kemauan untuk mencari solusinya.

Memecahkan masalah bukan hanya tujuan belajar matematika, tetapi juga sarana utama untuk melakukannya. Ini adalah bagian integral dari matematika, bukan bagian yang terisolasi dari program matematika. Peserta didik membutuhkan banyak kesempatan untuk merumuskan, bergulat dengan masalah dan memecahkan masalah kompleks yang melibatkan banyak usaha. Peserta didik didorong untuk merefleksikan pemikiran mereka selama proses pemecahan masalah sehingga, mereka dapat menerapkan dan menyesuaikan strategi yang dikembangkan untuk masalah lain dan dalam konteks

lain. Dengan memecahkan masalah matematika, peserta didik memperoleh cara berpikir, kebiasaan ketekunan dan keingintahuan, dan kepercayaan diri dalam situasi asing yang melayani mereka dengan baik di luar kelas matematika.

PENALARAN DAN PEMBUKTIAN (REASONING AND PROOF)

Standar Penalaran dan Pembuktian menekankan pemikiran logis yang membantu memutuskan suatu pemberian jawaban yang masuk akal. Peserta didik perlu mengembangkan kebiasaan memberikan alasan sebagai bagian integral dari jawaban yang diberikan. Penting bagi peserta untuk mempelajari nilai dari membenaran ide melalui argumen logis. Penalaran dan pembuktian sangat diperlukan untuk memberikan penjelasan kebenaran dari suatu kejadian yang memerlukan penjelasan matematis (secara matematika).

Penalaran merupakan cara berpikir untuk memberikan penjelasan dari suatu kejadian secara akal logis. Penalaran dalam matematika dibedakan menjadi dua yaitu penalaran deduktif dan penalaran induktif. Penalaran deduktif merupakan suatu penalaran yang menggunakan definisi, aksioma, atau teorema. Penalaran deduktif biasanya digunakan untuk membuktikan suatu teorema. Penalaran Induksi merupakan suatu penalaran dengan menyajikan susunan data sedemikian hingga untuk dapat menarik sebuah kesimpulan. Penalaran Induksi dapat dengan membuat tabel dan susunan data lainnya sehingga dapat membentuk suatu pola untuk menyimpulkan. Penalaran induksi juga dapat menggunakan cara pembuktian secara induksi matematika.

Standar Penalaran dan bukti harus dilakukan untuk dapat memberikan pemahaman dan juga hasil yang baik dalam pembelajaran matematika. Peserta didik harus mampu

mengembangkan proses penalaran dan bukti untuk mencapai suatu standar belajar matematika dalam sekolah. Standar Penalaran dan Bukti menekankan kemampuan peserta didik untuk dapat melakukan suatu keterampilan:

1. Mengakui penalaran dan bukti sebagai aspek fundamental matematika
2. Membuat dan menyelidiki dugaan matematika
3. Mengembangkan dan mengevaluasi argumen dan bukti matematika
4. Memilih dan menggunakan berbagai jenis alasan dan metode pembuktian

Penalaran dan pembuktian matematika menawarkan cara yang ampuh untuk mengembangkan dan mengekspresikan wawasan tentang berbagai fenomena. Peserta didik yang bernalar dan berpikir analitis cenderung mencatat pola, struktur, atau keteraturan dalam situasi dunia nyata dan matematika. Peserta didik bertanya tentang pola itu tidak disengaja atau terjadi karena suatu alasan. Peserta didik membuat dan menyelidiki dugaan matematika. Peserta didik mengembangkan dan mengevaluasi argumen dan bukti matematis, yang merupakan cara formal untuk mengekspresikan jenis penalaran dan pembuktian tertentu. Dengan menjelajahi fenomena, membenarkan hasil, dan menggunakan dugaan matematika di semua area konten dan dengan ekspektasi kecanggihan yang berbeda disemua tingkat kelas, peserta didik harus melihat dan mengharapkan bahwa matematika masuk akal atau logis.

KOMUNIKASI (COMMUNICATION)

Komunikasi matematis adalah cara berbagi ide dan memperjelas pemahaman. Melalui komunikasi dapat dijelaskan tentang ide menjadi objek refleksi, pemurnian, diskusi, dan amandemen. Ketika

peserta didik ditantang untuk mengkomunikasikan hasil pemikiran mereka kepada orang lain secara lisan atau tulisan, mereka belajar untuk menjadi lebih jelas, meyakinkan, dan tepat dalam penggunaan bahasa matematika mereka. Penjelasan harus mencakup argumen dan alasan matematis, bukan hanya deskripsi atau ringkasan prosedural. Mendengarkan penjelasan orang lain memberi peserta didik kesempatan untuk mengembangkan pemahaman mereka sendiri. Percakapan dengan ide-ide matematika yang dieksplorasi dari berbagai perspektif membantu para peserta didik mempertajam pemikiran mereka dan membuat koneksi.

Standar Komunikasi menunjukkan pentingnya kemampuan berbicara, menulis, mendeskripsikan, dan menjelaskan ide-ide matematika. Belajar berkomunikasi dalam matematika mendorong interaksi dan eksplorasi ide-ide di dalam kelas saat peserta didik belajar melalui diskusi aktif tentang pemikiran mereka. Tidak ada cara yang lebih baik untuk bergulat atau memperkuat ide selain mencoba mengartikulasikannya kepada orang lain.

Standar Komunikasi menekankan kemampuan peserta didik untuk dapat melakukan suatu keterampilan:

1. Mengatur dan mengkonsolidasikan pemikiran matematis mereka melalui komunikasi
2. Mengkomunikasikan pemikiran matematis mereka secara koheren dan jelas kepada teman sebaya, guru, dan lainnya
3. Menganalisis dan mengevaluasi pemikiran dan strategi matematika orang lain
4. Gunakan bahasa matematika untuk mengekspresikan ide-ide matematika dengan tepat

KONEKSI/HUBUNGAN (CONNECTION)

Salah satu standar kurikulum dalam pembelajaran matematika menurut NCTM yaitu kemampuan membuat koneksi (*connection*).

Koneksi matematika merupakan pemahaman yang mengharuskan siswa dapat memperlihatkan hubungan antara topik matematika dengan topik matematika, antara topik matematika dengan disiplin ilmu yang lain, dan dengan kehidupan sehari-hari. Tanpa adanya koneksi siswa akan mengalami hambatan dalam belajar matematika dikarenakan terlalu banyak konsep yang harus diingat. Tetapi dengan adanya koneksi siswa dapat membangun pemahaman baru dari pengetahuan sebelumnya.

Matematika bukanlah kumpulan untaian atau standar yang terpisah, meskipun sering dipartisi dan disajikan dengan cara ini. Sebaliknya, matematika adalah bidang studi yang terintegrasi. Ketika peserta didik menghubungkan ide-ide matematika, pemahaman mereka lebih dalam dan lebih tahan lama, dan mereka mulai melihat matematika sebagai satu kesatuan yang koheren. Mereka melihat hubungan matematika dalam interaksi yang kaya di antara topik-topik matematika, dalam konteks yang menghubungkan matematika dengan mata pelajaran lain, dan dalam minat dan pengalaman mereka sendiri. Melalui pengajaran yang menekankan keterkaitan ide-ide matematika, peserta didik tidak hanya belajar matematika tetapi juga tentang kegunaan matematika.

Standar koneksi memiliki dua bagian. Pertama, penting untuk menghubungkan di dalam dan di antara ide-ide matematika. Misalnya, bagian pecahan dari keseluruhan dihubungkan dengan konsep desimal dan persen. Siswa membutuhkan kesempatan untuk melihat bagaimana konsep matematika dibangun di atas satu sama lain dalam jaringan ide yang terhubung. Kedua, matematika harus dihubungkan dengan dunia nyata dan disiplin ilmu lain. Siswa harus melihat bahwa matematika memainkan peran penting dalam seni, sains, seni bahasa, dan ilmu sosial. Hal ini menunjukkan bahwa matematika harus sering diintegrasikan dengan bidang disiplin lain dan bahwa aplikasi matematika harus dieksplorasi dalam konteks

dunia nyata. Standar koneksi menekankan kemampuan peserta didik untuk dapat melakukan suatu keterampilan,

1. Mengenali dan menggunakan koneksi di antara ide-ide matematika
2. Memahami bagaimana ide matematika saling berhubungan dan membangun satu sama lain untuk menghasilkan keseluruhan yang koheren
3. Mengakui dan menerapkan matematika dalam konteks di luar matematika

Koneksi dalam matematika dapat memperlihatkan sebagai suatu hubungan,

1. Hubungan antara topik matematika dengan topik matematika,
2. Hubungan antara topik matematika dengan disiplin ilmu yang lain, dan
3. Hubungan antara topik matematika dengan kehidupan sehari-hari.

Contoh hubungan antara topik matematika dengan topik matematika yaitu dalam geometri terdapat bangun layang-layang, untuk menentukan luas dan keliling dari layang-layang tersebut dapat dicari dengan menghubungkan konsep matematika yang lain (teori pythagoras atau konsep bangun segitiga).

Pada pembelajaran matematika sekolah menengah harus lebih banyak memberikan kesempatan bagi siswa untuk mengembangkan kemampuan/pemahaman matematika melalui kurikulum yang digunakan dan pertanyaan-pertanyaan yang diberikan oleh guru, atau dari pertanyaan teman sekelas. Berikut ini contoh kegiatan pembelajaran untuk mengembangkan pemahaman siswa dari materi yang sudah dipelajari sebelumnya tentang penjumlahan dan perbandingan melalui studi kasus yang diberikan oleh guru.

Contoh Soal

Band sekolah akan mengadakan konser. Siswa kelas 7 bertugas untuk menyediakan minuman campuran air mineral dan jus cranberry dengan resep berikut:

<p>Resep A</p> <p>2 gelas jus cranberry 3 gelas air mineral</p>	<p>Resep B</p> <p>4 gelas jus cranberry 8 gelas air mineral</p>
<p>Resep C</p> <p>3 gelas jus cranberry 5 gelas air mineral</p>	<p>Resep D</p> <p>1 gelas jus cranberry 4 gelas air mineral</p>

Pertanyaan

1. Resep manakah yang memiliki rasa cranberry terkuat? Jelaskan jawaban anda.
2. Resep manakah yang memiliki rasa cranberry terlemah? Jelaskan jawaban anda.
3. Jika diminta untuk membuat 120 minuman campuran, berapa gelas jus cranberry dan air mineral yang dibutuhkan pada masing-masing resep? Jelaskan jawaban anda.

Pembahasan

Dalam hal ini siswa diminta untuk membentuk kelompok dengan anggota 2 atau 3 orang untuk mengerjakan soal **nomor 1 dan 2**. Setelah selesai mengerjakan, tiap kelompok diminta untuk mempresentasikan jawaban mereka di depan teman-temannya.

- Beberapa kelompok menyelesaikan soal tersebut dengan membandingkan bagian dari jus cranberry dengan jumlah keseluruhan pada masing-masing resep $(\frac{2}{5}, \frac{4}{12}, \frac{3}{8}, \frac{1}{5})$.
- Beberapa kelompok yang lain menyelesaikan soal tersebut dengan membandingkan bagian jus cranberry dengan air mineral pada masing-masing resep $(\frac{2}{3}, \frac{4}{8}, \frac{3}{5}, \frac{1}{4})$.
- Kelompok yang lain gagal dalam menghubungkan dengan konsep perbandingan karena mereka hanya menganggap sebatas jumlah gelas jus cranberry saja (2, 4, 3, 1).

Di bawah ini 4 strategi siswa dalam menyelesaikan pertanyaan nomor 3 pada masing-masing resep:

Kelompok yang menjawab resep A

Resep A terdiri dari 2 gelas jus cranberry dan 3 gelas air mineral sehingga menjadi 5 gelas campuran. Untuk membuat 120 gelas campuran, mereka membagi 120 dengan 5 yang menghasilkan 24 gelas. Sehingga banyaknya jus cranberry $2 \times 24=48$ gelas dan air mineral $3 \times 24=72$ gelas. Karena 48 gelas cranberry dan 72 gelas air mineral menghasilkan 120 gelas campuran, maka campuran tersebut sudah tepat.

Kelompok yang menjawab resep B

Resep B terdiri dari 4 gelas jus cranberry dan 8 gelas air mineral yang senilai dengan 1 gelas jus cranberry dengan 2 gelas air mineral (1:2). Untuk membuat 120 gelas campuran, mereka membagi 120 menjadi 3 bagian yang sama besar dengan masing-masing 40 gelas ($40+40+40=120$). Dengan demikian 1 bagian jus cranberry sama dengan 40 gelas, dan 2 bagian air mineral sama dengan 80 gelas. Sehingga menghasilkan 120 gelas campuran.

Kelompok yang menjawab resep C

Resep C terdiri dari 3 gelas jus cranberry dan 5 gelas air mineral. Untuk menghasilkan 120 gelas campuran, mereka menggunakan metode dengan menggandakan bagian resep campuran sampai menghasilkan jumlah 120 gelas campuran. Berikut tabel dari penggandaan resep:

Gelas Jus	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45
Gelas Air	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
Gelas Campuran	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120

Berdasarkan tabel tersebut, untuk menghasilkan 120 gelas campuran dibutuhkan 45 gelas jus cranberry dan 75 gelas air mineral.

Kelompok yang menjawab resep D

Resep D terdiri dari 1 gelas jus cranberry dan 4 gelas air mineral. Siswa mencoba untuk menggandakan menjadi 20 gelas jus cranberry dan $4 \times 20 = 80$ gelas air mineral, menghasilkan 100 gelas campuran (masih <120). Mereka mencoba dengan 30 gelas jus dan $4 \times 30 = 120$ gelas air, menghasilkan 150 gelas campuran (>120). Selanjutnya, mencoba dengan 25 gelas jus cranberry dan $4 \times 25 = 100$ gelas air, menghasilkan 125 gelas campuran (>120). Mereka mencoba lagi dengan 24 gelas jus cranberry dan $4 \times 24 = 96$ gelas air mineral, menghasilkan 120 gelas campuran.

REPRESENTASI (REPRESENTATION)

Standar Representasi menekankan penggunaan simbol, bagan, grafik, manipulatif, dan diagram sebagai metode yang ampuh untuk mengungkapkan gagasan dan hubungan matematika. Simbolisme dalam matematika bersama dengan alat peraga seperti

bagian dan grafik harus dipahami oleh peserta didik sebagai cara mengkomunikasikan gagasan matematika kepada orang lain. Berpindah dari satu representasi ke representasi lain adalah cara penting untuk menambah kedalaman pemahaman pada ide yang baru terbentuk.

Ide matematika dapat direpresentasikan dengan berbagai cara: gambar, media konkrit, tabel, grafik, simbol angka dan huruf, tampilan spreadsheet, dan lain sebagainya. Cara-cara di mana ide-ide matematika direpresentasikan adalah dasar bagaimana peserta didik memahami dan menggunakan ide-ide itu. Banyak representasi yang sekarang dianggap biasa merupakan hasil dari proses perbaikan budaya yang terjadi selama bertahun-tahun. Ketika peserta didik memperoleh akses kerepresentasi matematika dan ide-ide yang mereka ungkapkan dan ketika mereka dapat membuat representasi untuk menangkap konsep atau hubungan matematika, mereka memperoleh seperangkat alat yang secara signifikan memperluas kapasitas mereka untuk memodelkan dan menafsirkan fenomena fisik, sosial, dan matematika.

Jika matematika adalah ilmu pola, representasi dapat diartikan sebagai pola-pola yang dicatat dan dianalisis. Siswa yang memiliki pemikiran yang kreatif secara matematis, mereka semakin mengembangkan konsep yang sudah dipelajari dalam representasi matematik dan memahami bagaimana menggunakannya secara produktif, termasuk memilih representasi tertentu untuk mendapatkan wawasan tertentu atau mencapai tujuan tertentu.

Besar kecilnya bilangan dapat direpresentasikan dalam bentuk notasi ilmiah dan besarnya untuk mempermudah dalam membandingkan dan menggunakannya dalam perhitungan. Misalnya dalam aljabar, grafik dapat digunakan untuk menyampaikan jenis informasi tertentu secara visual. Sedangkan ekspresi simbolik digunakan untuk mempermudah dalam memanipulasi, menganalisis, dan mengubah.

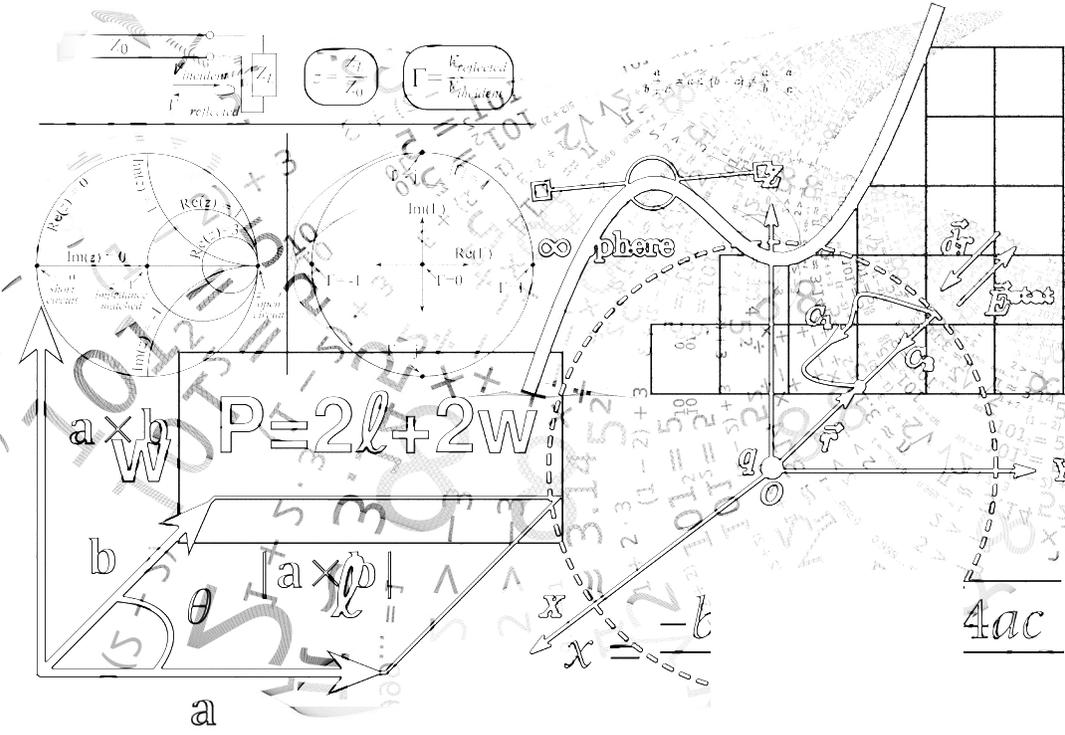
Standar koneksi menekankan kemampuan peserta didik untuk dapat melakukan suatu keterampilan:

1. Membuat dan menggunakan representasi untuk mengatur, merekam, dan mengkomunikasikan ide-ide matematika.
2. Memilih, menerapkan, dan menerjemahkan antara representasi matematika untuk memecahkan masalah.
3. Menggunakan representasi untuk model dan menafsirkan fenomena fisik, sosial, dan matematika.

Disekolah dasar, siswa sering menggunakan representasi untuk alasan tentang obyek dan tindakan mereka dapat melihat secara langsung. Di kelas menengah, siswa semakin membuat dan menggunakan representasi matematis untuk objek yang tidak dilihat secara langsung, seperti bilangan rasional. Siswa SMA, mereka bekerja lebih abstrak seperti fungsi, matrik, dan persamaan. Menggunakan berbagai representasi dari suatu objek, siswa harus mampu mengenali struktur matematika umum di konteks yang berbeda. Misalnya, jumlah dari n bilangan ganjil pertama, dan jarak yang ditempuh oleh kendaraan yang dimulai pada saat kecepatan 0 dan mempercepat pada tingkat yang konstan dapat diwakili oleh fungsi dalam bentuk $f(x) = ax^2$. Siswa SMA harus mampu menciptakan dan menafsirkan model dari fenomena yang lebih kompleks, menggambarkan dari konteks lebih luas, mengidentifikasi ciri penting dari situasi dan dengan menemukan representasi yang menangkap hubungan matematis antara ciri tersebut.

Lebih jauh, dalam standar proses, dijelaskan bahwa guru perlu melakukan beberapa perubahan kegiatan di kelas: (1) mengubah kelas dari sekedar kumpulan siswa menjadi komunitas matematika, (2) menjadikan penalaran dan bukti matematika sebagai alat pembenaran dan menjauhkan otoritas guru untuk memutuskan suatu kebenaran, (3) mementingkan pemahaman daripada hanya

mengingat prosedur, (4) mementingkan membuat dugaan, penemuan dan pemecahan masalah dan menjauhkan dari pembelajaran yang hanya menekankan prosedur (penemuan jawaban secara mekanis), dan (5) mengaitkan matematika, ide-ide dan aplikasinya, supaya matematika tidak hanya diperlakukan sebagai kumpulan konsep dan prosedur yang kering (terpisahkan dari kehidupan).



Daftar Pustaka

- Anton, H. dan Rorres, C. (2005) *Elementary Linear Algebra Ninth Edition, American College of Radiology Network*. doi: 10.1109/IJCNN.2006.247060.
- Bartle, R. G. dan Sherbert, D. R. (2011) *Introduction To Real Analysis Fourth Edition, Library of Congress Cataloging-in-Publication Data*.
- NCTM (2000) *Principle and Standarts for School Mathematics*.
- NCTM (2010) "Executive Summary Principles and Standarts For School Mathematics," *Journal of Equine Veterinary Science*, 18(11), hal. 719. doi: 10.1016/s0737-0806(98)80482-6.
- Rich, B. dan Thomas, C. (2009) *SCHAUM'S Outlines Geometry Fourth Edition, The McGraw-Hill Companies*.
- Spiegel, M. R., Schiller, J. J. dan Srinivasan, R. A. (2013) *SCHAUM'S Outlines Probability and Statistics (Fourth Edition), The McGraw-Hill Companies*. doi: 10.1080/09332480.2013.845457.
- Spiegel, M. R. dan Stephens, L. J. (2008) *SCHAUM'S Outlines Statistics Fourth Edition*. Fourth. The McGraw-Hill Companies.
- Stillwell, J. (2005) *Four Pillars of Geometry*. Springer Science+Business Media, Inc.
- Subanji (2011) "Matematika Sekolah dan Pembelajarannya," *J-Teqip*, (1), hal. 1–12.
- Varberg, D., Purcell, E. J. dan Rigdon, S. E. (2010) "Calculus, 9th Edition," hal. 880.

MATEMATIKA SEKOLAH

Matematika Sekolah merupakan suatu bagian dari Matematika yang memiliki ruang lingkup untuk pembelajaran di sekolah. Matematika Sekolah yang diajarkan pada tingkat sekolah tersebut melatih peserta didik untuk berusaha berpikir logis dan juga analitis untuk menumbuhkan daya pikir. Matematika Sekolah juga memberikan pemahaman kepada peserta didik fungsi dari Matematika untuk kehidupan sehari-hari. Matematika Sekolah memiliki Prinsip dan Standar yang menjadi ciri khusus dari matematika untuk kemajuan dalam Pendidikan. Kemajuan Pendidikan dalam Matematika telah dikaji lebih dalam oleh para dewan guru Matematika yang disebut NCTM. *National Council Of Teacher Of Mathematics* (NCTM) merupakan organisasi terbesar didunia yang peduli terhadap pendidikan Matematika dengan anggota di Amerika Serikat, Kanada, dan Internasional

NCTM menjelaskan dan membahas standar yang harus ada dalam Matematika Sekolah. Standar dalam Matematika Sekolah ada 2 yaitu, Standar Isi dan Standar Proses. Standar Isi menjelaskan konten matematika yang harus dipelajari peserta didik agar berhasil. Standar Isi berisi tentang Bilangan dan Operasi, Aljabar, Geometri, Pengukuran, dan Analisis Data dan Probabilitas. Standar Proses menyoroti proses matematika yang peserta didik manfaatkan untuk memperoleh dan menggunakan pengetahuan konten mereka. Standar Proses berisi tentang Pemecahan Masalah, Penalaran dan Pembuktian, Komunikasi, Koneksi, dan Representasi.

 **ELMATERA**
PUBLISHER

Penerbit Elmaterra (Anggota IKAPI)
Jl. Wau 73 Kav 3 Sambilegi Baru Maguwoharjo Yogyakarta
Telp. 0274-4332287 Email : penerbiteimaterra@yahoo.co.id

ISBN 978 623 223 139 9



9 786232 231399